



POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi
Appello del 18/6/2019

COGNOME: _____ NOME: _____

MATRICOLA o CODICE PERSONA: _____

FIRMA: _____ Visto del docente: _____

6	6	6	6	3	3	2

Voto totale

32

ATTENZIONE !

- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1) Il parco-biciclette dell'azienda Cyclone, gestore free-floating a noleggio, è composto da bici aventi al più 3 anni, al termine dei quali, a causa dell'elevata usura, i mezzi vengono comunque rottamati. Per la stessa ragione, un certa frazione delle bici in servizio a inizio anno viene rottamata anche al termine del primo (10%), del secondo (30%) e del terzo (60%) anno di vita.

Poiché gli utenti preferiscono noleggiare bici nuove, ciascuna bici produce un ricavo annuo differenziato nel primo (4, in unità opportune), nel secondo (2) e nel terzo (1) anno di vita.

a) Descrivere il parco-biciclette mediante un sistema a tempo discreto, in cui $u(t)$ rappresenti il numero di nuove bici messe in servizio nell'anno t e $y(t)$ il ricavo prodotto nell'anno t . Specificare il significato delle variabili di stato adottate.

b) Studiare la stabilità del sistema, discutendo anche il tempo di risposta e l'eventuale presenza di oscillazioni nel movimento libero.

c) Determinare la funzione di trasferimento del sistema e calcolare il guadagno.

d) Si supponga ora che l'azienda decida di far dipendere l'acquisto dal ricavo, seguendo ogni anno la regola $u(t) = ky(t)$, $k > 0$. Scrivere le nuove equazioni di stato del sistema e determinare un valore di k che lo renda instabile (utilizzando un criterio formale: non basta la sola calcolatrice).

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $x_i(t)$ = n. bici che compiono i anni di servizio all'istante t

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= 0.9 u(t) \\ x_2(t+1) &= 0.7 x_1(t) \\ x_3(t+1) &= 0.4 x_2(t) \\ y(t) &= 4x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) \end{aligned} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $\sigma_A = \{0, 0, 0\}$ $|\lambda_i| < 1 \forall i \Leftrightarrow A$ asint. stabile
 $T_R \leq 3$, sistema a memoria finita
 $\hookrightarrow$ no oscillazioni

c) $\begin{cases} z x_1 = 0.9 u \\ z x_2 = 0.7 x_1 \\ z x_3 = 0.4 x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{0.9}{z} u \\ x_2 &= \frac{0.63}{z^2} u \\ x_3 &= \frac{0.252}{z^3} u \end{aligned}$

$$y = 4x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\frac{y}{u} = \underbrace{\left(4 \frac{0.9}{z} + 2 \frac{0.63}{z^2} + \frac{0.252}{z^3} \right)}_{G(z)}$$

$$\mu = G(1) = 5.112$$

d) $x_1(t+1) = 0.9K (4x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t))$; A è matrice non negativa:

$$\vdots$$

$$A = \begin{vmatrix} 3.6K & 1.8K & 0.9K \\ 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{vmatrix}$$

Posto $0.9K > 1$
 $(K > 1/0.9)$, tutte le
 colonne hanno somma
 $> 1 \Rightarrow \lambda_D > 1$
 $\Rightarrow$ sistema instabile

2) Un sistema meccanico è descritto dal seguente modello di stato, in cui (x_1, x_2) rappresentano, rispettivamente, posizione e velocità.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

- Studiare la stabilità, la raggiungibilità e l'osservabilità del sistema.
- Progettare un ricostruttore dello stato il cui errore di stima si annulli in circa 0.1 secondi.
- Progettare una legge di controllo che porti il sistema a regime in circa 1 secondo.
- Verificare se è possibile controllare il sistema con una retroazione diretta (statica) dall'uscita, cioè $u = ky$, determinando (se esistono) i valori di k per cui il sistema è asintoticamente stabile.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad c = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$a) \left. \begin{aligned} \text{tr} A &= -1 < 0 \\ \det A &= 1 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \text{ asint. stabile}$$

$$R = \begin{vmatrix} b & Ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \det R \neq 0 \Rightarrow (A, b) \text{ compl. ragg.}$$

$$\sigma = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \det \sigma \neq 0 \Rightarrow (A, c) \text{ compl. oss.}$$

$$b) A + lc = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & 1 \\ e_2 - 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$T_R(A + lc) = 0.1 \Rightarrow T_D(A + lc) = \frac{0.1}{5} = 0.02 \Rightarrow \lambda_D = -50$$

$$\left. \begin{aligned} \text{tr}(A + lc) &= e_1 - 1 = -100 \\ \det(A + lc) &= -e_1 - e_2 + 1 = 2500 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} e_1 &= -99 \\ e_2 &= -2400 \end{aligned}$$

$$c) A + bk = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ k_1 - 1 & k_2 - 1 \end{vmatrix}$$

$$T_R(A + bk) = 1 \Rightarrow T_D(A + bk) = \frac{1}{5} = 0.2 \Rightarrow \lambda_D = -5$$

$$\left. \begin{aligned} \text{tr}(A + bk) &= k_2 - 1 = -10 \\ \det(A + bk) &= 1 - k_1 = 25 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} k_1 &= -24 \\ k_2 &= -9 \end{aligned}$$

$$d) \dot{x} = Ax + bu = Ax + bk_y = Ax + bk_c x = (A + bk_c)x$$

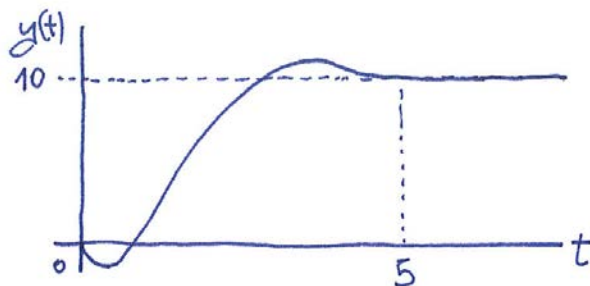
$$A + bk_c = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ k - 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{tr}(A + bk_c) = -1 < 0$$

$$\det(A + bk_c) = 1 - k > 0 \text{ se e solo se } 1 > k > -\infty$$

$$\text{Quindi } (A + bk_c) \text{ asint. stab.} \Leftrightarrow k < 1$$

3) La risposta allo scalino unitario di un sistema lineare è riportata in figura.



- Determinare una funzione di trasferimento $G(s)$ compatibile con tutte le informazioni note.
- Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase di $G(s)$.
- Discutere la stabilità del sistema ottenuto con retroazione unitaria (negativa) di $G(s)$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $y(t) \rightarrow \bar{y} = 10$ per $t \rightarrow \infty \Rightarrow G(s)$ esternamente stabile, $G(0) = 10$.

$\dot{y}(0) \neq 0 \Rightarrow r = 1$

$N = 2$ estremi, $G(s)$ avrà almeno 2 zeri: scelgo $G(s)$ con 2 zeri superiori e ($r=1$) 3 poli (coincidenti per semplicità)

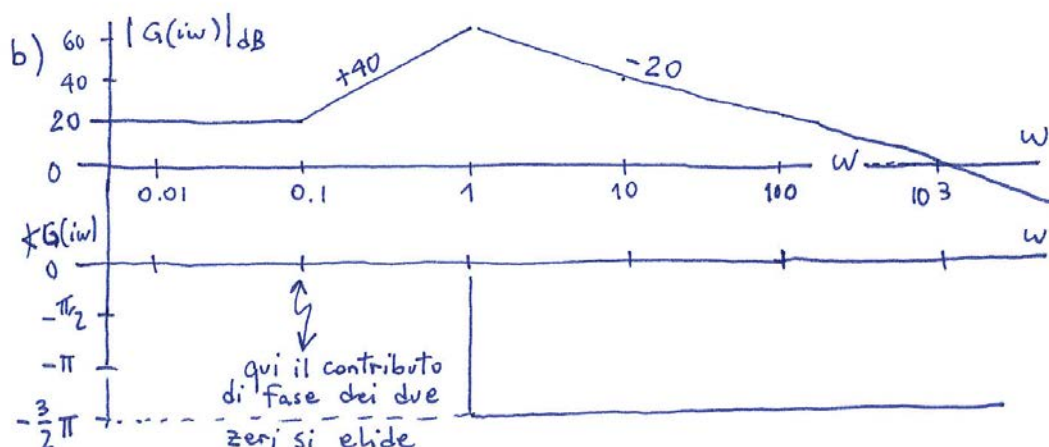
$$G(s) = 10 \frac{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}{(1+sT)^3}$$

$T \approx 1$, perché $T_R \approx 5$. τ_1, τ_2 di segno opposto, perché $\dot{y}(0) < 0$



Scelgo $\tau_1 = 10$, $\tau_2 = -10$.

Quindi $G(s) = 10 \frac{(1-10s)(1+10s)}{(1+s)^3}$

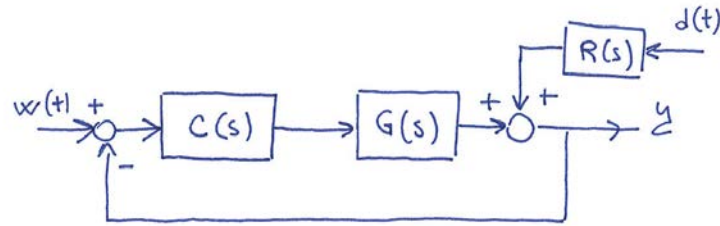


c) Posso usare il criterio di Bode, visto che le condizioni di applicabilità sono soddisfatte.

(Poli di $G(s)$ hanno tutti $\operatorname{Re}(p_i) \leq 0$; $\exists! \omega_c$) :

Poiché $\varphi_c \simeq -\frac{3}{2}\pi$, quindi $\varphi_m \simeq -\frac{\pi}{2} < 0$, il sistema retroazionato è instabile.

4) Si consideri il sistema in figura, in cui $G(s) = (1-s)/(1+s)^2$ e $R(s) = 0.1/(1+0.01s)$.



- Determinare una possibile funzione di trasferimento per il blocco $C(s)$, contenente 1 polo e 1 zero, affinché il sistema risulti asintoticamente stabile e l'errore $e(t)$ a regime a fronte di ingressi costanti sia nullo. Specificare il margine di fase ottenuto.
- Stimare, anche in modo approssimato, la banda del sistema e il suo tempo di risposta.
- Determinare, anche in modo approssimato, l'ampiezza dell'errore a regime dovuto a un disturbo $d(t) = \sin(10t)$.

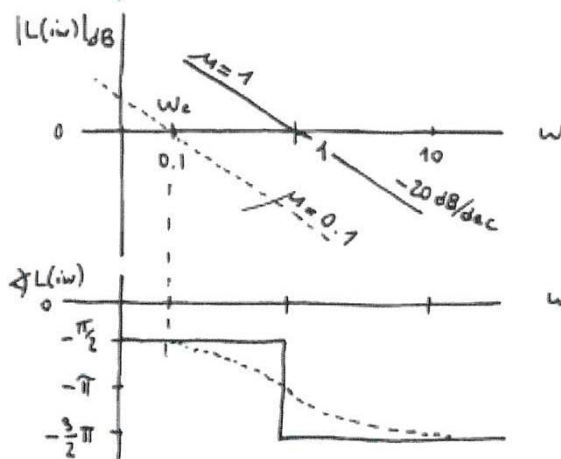
Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) Per avere $e_w(\infty) = e_d(\infty) = 0$ la $L(s)$ deve contenere un integratore, quindi:

$$A(s) = \frac{\mu}{s}(1+s\tau) \Rightarrow L(s) = \frac{\mu}{s}(1+s\tau) \frac{1-s}{(1+s)^2}$$

Pongo $\tau=1$, quindi $L(s) = \frac{\mu}{s} \frac{1-s}{1+s}$.

Applico il criterio di Bode ($L(s)$ non ha poli con $\text{Re}(p_i) > 0$):



Ponendo $\mu=0.1$ si ottiene:

$$\omega_c = 0.1 \quad \varphi_c \approx -\pi/2$$

$$\varphi_m \approx \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } BP &= \{ \omega : 0 < \omega < \omega_c \} \\ &= \{ \omega : 0 < \omega < 0.1 \} \end{aligned}$$

$$T_R \approx \frac{5}{\omega_c} = 50$$

c) La frequenza $\omega = 10$ è abbondantemente al di fuori della banda passante del sistema retroazionato $H = L/(1+L)$. Quindi $|H(i10)| \approx 0 \text{ dB} = 1$ e $e(t) \approx 0.1 \sin(10t + \varphi)$. Infatti il segnale $d'(t)$ all'uscita del blocco $R(s)$ è $d'(t) = 0.1 \sin(10t + \gamma)$, visto che $R(s)$ è un filtro passa-basso con banda $BP = (0, 100)$: si ha quindi $|R(i10)| \approx 0.1$.

- 5) Definizione di equilibrio stabile e asintoticamente stabile per il sistema $\dot{x}(t) = f(x(t))$.
- 6) Definizione di sistema (A, b) stabilizzabile. Condizioni di stabilizzabilità.
- 7) Illustrare la sequenza di comandi da digitare, una volta avviato Matlab, per visualizzare la risposta allo scalino del sistema

$$G(s) = \frac{10(1 - 10s)}{(1 + s)(1 + 2s)^2}$$

Risposte ai quesiti 5-6-7 [se necessario proseguire sul retro]:

5) $\bar{x}$ è equilibrio stabile se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che
 $|x(0) - \bar{x}| < \delta_\varepsilon$ implica $|x(t) - \bar{x}| < \varepsilon$, $\forall t \geq 0$, $\forall x(0)$
 con $|x(0) - \bar{x}| < \delta_\varepsilon$.

$\bar{x}$ è equilibrio asintoticamente stabile se è stabile e
 se $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}$.

6) (A, b) è stabilizzabile se ammette una legge di controllo stabilizzante, cioè se $\exists K$ tale che $(A + bK)$ è asintoticamente stabile.

(A, b) completamente raggiungibile $\Rightarrow (A, b)$ stabilizzabile
 (A, b) NON compl. raggiungibile:

(A, b) stabilizzabile $\Leftrightarrow$ Parte non raggiungibile è asintoticamente stabile.

7) $G(s) = \frac{-100s + 10}{4s^3 + 8s^2 + 5s + 1}$

quindi

`>> sis = tf([-100 10], [4 8 5 1])`

`>> step(sis)`