



POLITECNICO
MILANO 1863

COMPLESSITA' NEI SISTEMI E NELLE RETI

Prof. C. Piccardi

Appello del 7/9/2026

COGNOME: _____ NOME: _____

Codice Persona: _____ Corso di laurea (INF, MTM, ...): _____

Firma dello studente: _____ Visto del docente: _____

5	5	5	6	6	5
---	---	---	---	---	---

Voto totale

32

AVVERTENZE

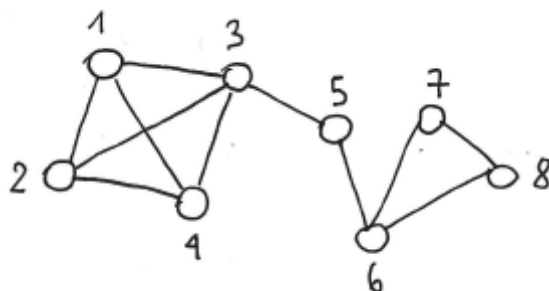
Non è permesso avere a disposizione – anche se non utilizzato – alcun tipo di materiale informativo (libri, appunti, ...) né alcun dispositivo (smartphone/watch/glasses, ...), pena l'annullamento della prova.

- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Lo studente è tenuto a prendere visione delle **modalità d'esame dettagliate** alla pagina web del corso (<http://piccardi.faculty.polimi.it/csr.html>).

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 1 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



- Determinare e rappresentare graficamente la distribuzione di grado cumulata.
- Calcolare il primo e il secondo momento della distribuzione di grado.

Si consideri la partizione nelle due sottoreti corrispondenti, rispettivamente, ai 4 nodi di destra e di sinistra.

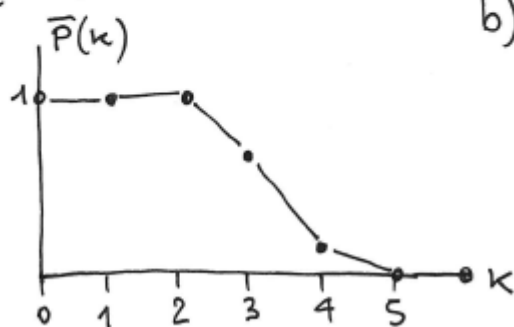
- Calcolare la modularità associata a tale partizione.
- Calcolare la probabilità di persistenza di ciascuna delle due comunità.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

$$a) [k_i] = [3 \ 3 \ 4 \ 3 \ 2 \ 3 \ 2 \ 2]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{distr. di grado: } P(k) = \frac{\text{n}^\circ \text{ nodi con } k_i = k}{N} \\ P(2) = \frac{3}{8}, \quad P(3) = \frac{4}{8}, \quad P(4) = \frac{1}{8}, \quad P(k) = 0 \text{ per ogni altro } k \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{distr. di grado cumulata: } \bar{P}(k) = \frac{\text{n}^\circ \text{ nodi con } k_i \geq k}{N} \\ \bar{P}(0) = \bar{P}(1) = \bar{P}(2) = 1, \quad \bar{P}(3) = \frac{5}{8}, \quad \bar{P}(4) = \frac{1}{8}, \\ \bar{P}(5) = \bar{P}(6) = \dots = 0 \end{array} \right.$$



$$\begin{aligned} b) \quad \langle k \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} k P(k) = \\ &= 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{4}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{11}{4} = \\ &= 2.75 \\ \langle k^2 \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(k) = \\ &= 4 \cdot \frac{3}{8} + 9 \cdot \frac{4}{8} + 16 \cdot \frac{1}{8} = 8 \end{aligned}$$

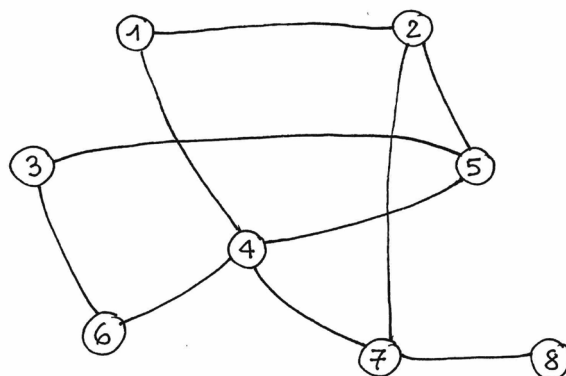
$$c) Q = \sum_{h=1,2} \left[\frac{L_h}{L} - \left(\frac{k_h}{2L} \right)^2 \right] = \left[\frac{6}{11} - \left(\frac{13}{22} \right)^2 \right] \\ (L=11) + \left[\frac{4}{11} - \left(\frac{9}{22} \right)^2 \right] = 0.393$$

$$d) \alpha_c = \frac{\sum_{i \in c} k_i^{INT}}{\sum_{i \in c} k_i} \quad \alpha_1 = \frac{3+3+3+3}{3+3+4+3} = \frac{12}{13} \simeq 0.92 \\ \alpha_2 = \frac{1+3+2+2}{2+3+2+2} = \frac{8}{9} \simeq 0.89$$

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 2 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



- Calcolare distanza media, diametro ed efficienza della rete.
- Calcolare la closeness centrality di ciascun nodo.
- Calcolare il coefficiente di clustering locale e globale.
- Calcolare il valore di Information Centrality per il solo nodo 4.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

$$a) [d_{ij}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ & 0 & 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ & & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ & & & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ & & & & 0 & 2 & 2 & 3 \\ & & & & & 0 & 2 & 3 \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$\langle d \rangle = \frac{1}{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{j>i} d_{ij} = \frac{1}{28} \cdot 54 = 1.9286$$

$$D = \max d_{ij} = 4$$

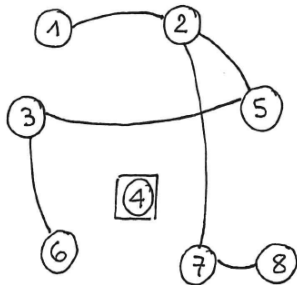
$$E = \frac{1}{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{j>i} \frac{1}{d_{ij}} = \frac{1}{28} \left(\frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{3} + 11 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{1}{1} \right) = 0.6339$$

$$b) \gamma_i = \frac{N-1}{\sum_j d_{ij}} \quad [\gamma_i] = \left[\frac{7}{14} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{7}{16} \quad \frac{7}{10} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{7}{14} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{7}{18} \right]$$

c) Non esistono triangoli nella rete, per cui $C_i = 0 \quad \forall i$
e $C = 0$.

$$d) I_4 = \frac{\Delta E_4}{E}, \text{ dove } \Delta E_4 = E - E_4$$

↳ efficienza della rete dopo rimozione dei link connessi al nodo 4.



$$[d_{ij}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & \infty & 2 & 4 & 2 & 3 \\ & 0 & 2 & \infty & 1 & 3 & 1 & 2 \\ & & 0 & \infty & 1 & 1 & 3 & 4 \\ & & & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ & & & & 0 & 2 & 2 & 3 \\ & & & & & 0 & 4 & 5 \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$E_4 = \frac{1}{28} \left(\underbrace{7 \cdot \frac{1}{\infty}}_{=0} + 1 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{1} \right) = 0.4149$$

$$I_4 = \frac{0.6339 - 0.4149}{0.6339} = 0.3455$$

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 3 (5 punti)

Si proponga una rete non diretta formata da (almeno) 15 nodi, in cui esistano k-core non vuoti per ogni $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

a) Una volta disegnata la rete, si svolga la scomposizione k-core per dimostrare l'esistenza dei k-core richiesti.

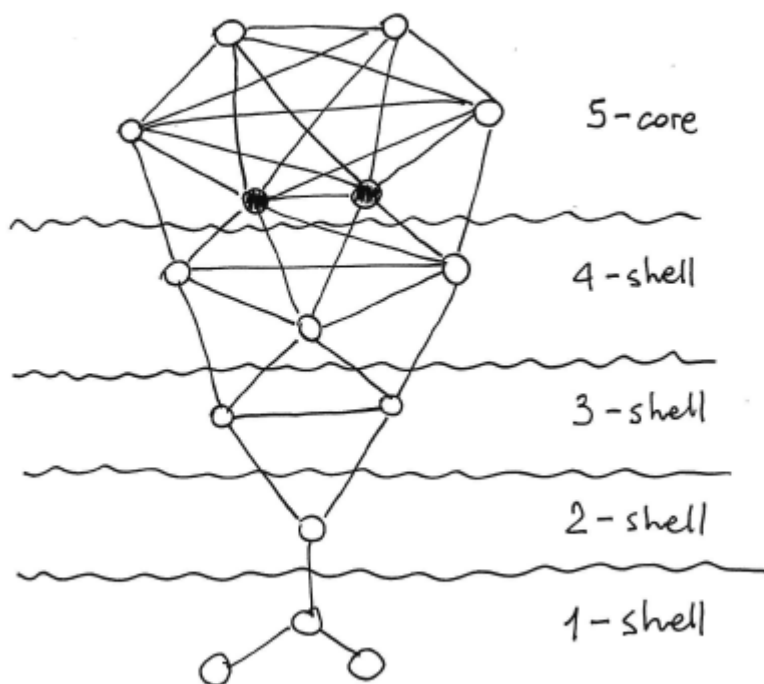
Sulla rete ottenuta al punto a):

b) Determinare (per ispezione visiva) il diametro.

c) Determinare il nodo con random walk centrality più elevata e determinarne il valore.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

③ a) Una possibile rete, con la decomposizione richiesta:



b) $D = \max_{i,j} d_{ij}$

Per ispezione, noto che $D = 6$.

c) $\pi_i = \frac{K_i}{\sum_j K_j}$

Il nodo con π_i più elevata è quello con grado più elevato: si tratta dei due nodi neri, che hanno $K_i = 7$,

per cui $\pi_i = \frac{7}{68}$.

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Problema 4 (6 punti)

Modello “maximum capacity” (Motter-Lai) di cascata di guasti: definizione e risultati principali.

Risposta [!!! non eccedere lo spazio di questa pagina !!!]:

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Problema 5 (6 punti)

Modello “small-world” (Watts-Strogatz): procedura di costruzione e proprietà.

Risposta [!!! non eccedere lo spazio di questa pagina !!!]:

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata = - 0.5, risposta non data = 0)

Problema 6 (5 punti)

1) In una rete Erdős-Rényi generata con il modello $G(N, p)$, il valore atteso della densità è pari a

- X [1] p
- [2] $p(N - 1)$
- [3] $p/(N - 1)$

2) Una rete diretta è debolmente connessa ma non fortemente connessa. Ne segue che

- [1] per ogni coppia di nodi (i, j) esistono sia il percorso $i \rightarrow j$ che il percorso $j \rightarrow i$.
- [2] per ogni coppia di nodi (i, j) esiste almeno uno tra il percorso $i \rightarrow j$ e il percorso $j \rightarrow i$.
- X [3] per almeno una coppia di nodi (i, j) esiste almeno uno tra il percorso $i \rightarrow j$ e il percorso $j \rightarrow i$.

3) L'efficienza E di una rete non pesata prende valori nell'intervallo

- X [1] $[0, 1]$
- [2] $[0, N]$
- [3] $[0, N(N - 1)]$

4) In una rete non diretta, non pesata, un nodo i avente grado $k_i = 3$

- [1] appartiene sicuramente al 3-core.
- [2] appartiene sicuramente a un k -core con $k \geq 3$.
- X [3] appartiene sicuramente a un k -core con $k \leq 3$.

5) Il modello Dorogovtsev-Mendes-Samukhin (DMS) crea una rete

- [1] con coefficiente di clustering regolabile a piacere.
- [2] con distanza media regolabile a piacere.
- X [3] con distribuzione di grado power-law avente esponente regolabile a piacere.