



POLITECNICO
MILANO 1863

COMPLESSITA' NEI SISTEMI E NELLE RETI

Prof. C. Piccardi

Appello del 2/7/2026

COGNOME: _____ NOME: _____

Codice Persona: _____ Corso di laurea (INF, MTM, ...): _____

Firma dello studente: _____ Visto del docente: _____

5	5	5	6	6	5

Voto totale

32

AVVERTENZE

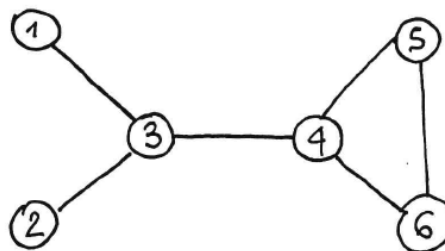
Non è permesso avere a disposizione – anche se non utilizzato – alcun tipo di materiale informativo (libri, appunti, ...) né alcun dispositivo (smartphone/watch/glasses, ...), pena l'annullamento della prova.

- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Lo studente è tenuto a prendere visione delle **modalità d'esame dettagliate** alla pagina web del corso (<http://piccardi.faculty.polimi.it/csr.html>).

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 1 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



Per ciascun nodo, calcolare:

- la degree centrality;
- la betweenness centrality;
- la closeness centrality;
- la random walk centrality;
- il coefficiente di clustering.
- il grado medio dei vicini.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

$$\textcircled{1} \text{ a) } [K_i] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } [d_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ & & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 0 & 1 & 1 \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[b_i] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0+1+1+1+1+1+1+1 \\ 0+1+1+1+1+1+1+1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_i = \sum_{j,k} \frac{n_{jk(i)}}{n_{jk}}$$

$$\text{c) } \gamma_i = \frac{N-1}{\sum_j d_{ij}} \quad [\gamma_i] = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & \frac{5}{11} & \frac{5}{7} & \frac{5}{7} & \frac{5}{10} & \frac{5}{10} \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \pi_i = \frac{K_i}{\sum_j K_j} \quad [\pi_i] = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{3}{12} & \frac{3}{12} & \frac{2}{12} & \frac{2}{12} \end{bmatrix}$$

(rete non diretta)

$$\text{e) } C_i = \begin{cases} \frac{2e_i}{K_i(K_i-1)}, & \text{se } K_i > 1 \\ 0, & \text{se } K_i \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{K_i(K_i-1)}{2} \right] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ [e_i] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ [C_i] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$f) \quad K_{nn} = \frac{\langle K^2 \rangle}{\langle K \rangle}$$

distr. di grado: $P(1) = \frac{1}{3} = P(2) = P(3)$, $P(k) = 0$
 per altro k

$$\langle K \rangle = \sum_k K P(k) = \sum_i \frac{k_i}{N} = 2$$

$$\langle K^2 \rangle = \sum_k K^2 P(k) = 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$$

$$K_{nn} = \frac{14}{3 \times 2} = 2.33$$

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 2 (5 punti)

Si consideri la rete descritta dalla seguente matrice di adiacenza:

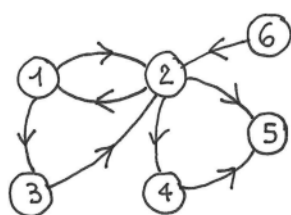
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Determinare le componenti SCC, IN e OUT.
- Determinare le distribuzioni di grado entrante e uscente, e i loro momenti primi.
- Calcolare la densità della rete.
- A partire dal nodo 1, determinare i primi due passi di un random walker. A questo scopo, abbiamo a disposizione un generatore di numeri casuali uniformemente distribuiti nell'intervallo $[0,1]$, i cui primi numeri estratti sono i seguenti:

0.4854 0.8003 0.1419 0.4218 0.8147 0.9058 0.1270 0.9134 0.6324 ...

(nota bene: specificare con precisione la procedura utilizzata).

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:



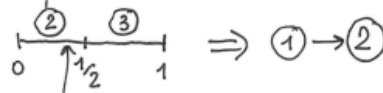
a) $SCC = \{1, 2, 3\}$ $IN = \{6\}$ $OUT = \{4, 5\}$

b) $[K_i^{IN}] = [1 \ 3 \ 1 \ 1 \ 2 \ 0]$ (= somme di colonna di A)
 $[K_i^{OUT}] = [2 \ 3 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]$ (= somme di riga di A)

$P(k)^{IN} : P(1)^{IN} = \frac{3}{6}, P(2)^{IN} = \frac{1}{6}, P(3)^{IN} = \frac{1}{6}, P(0)^{IN} = \frac{1}{6},$
 $P(k)^{IN} = 0 \ \forall \text{altro } k$
 $\langle K^{IN} \rangle = \frac{1}{N} \sum_i K_i^{IN} = \frac{8}{6} = 1.33$
 $P(k)^{OUT} : P(1)^{OUT} = \frac{3}{6}, P(2)^{OUT} = \frac{1}{6}, P(3)^{OUT} = \frac{1}{6}, P(0)^{OUT} = \frac{1}{6},$
 $P(k)^{OUT} = 0 \ \forall \text{altro } k$
 $\langle K^{OUT} \rangle = \frac{1}{N} \sum_i K_i^{OUT} = \frac{8}{6} = 1.33$

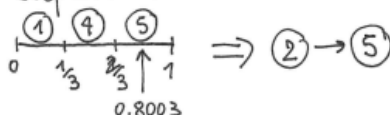
c) $\rho = \frac{L}{N(N-1)} = \frac{8}{6 \times 5} = 0.266$

d) step 1: NODO 1 : successori : $\{2, 3\}$



0.4854

step 2: NODO 2 : successori : $\{1, 4, 5\}$



0.8003

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 3 (5 punti)

Abbiamo a disposizione un generatore di numeri casuali uniformemente distribuiti nell'intervallo $[0,1]$, i cui primi numeri estratti sono i seguenti (l'ordine di lettura è da sinistra a destra, quindi dall'alto al basso):

0.4854 0.8003 0.1419 0.4218 0.8147 0.9058 0.1270 0.9134 0.6324 0.0975
 0.2785 0.5469 0.8575 0.9649 0.1576 0.9706 0.9572 0.9157 0.7922 0.9595
 0.6557 0.0357 0.8491 0.9340 0.6787 ...

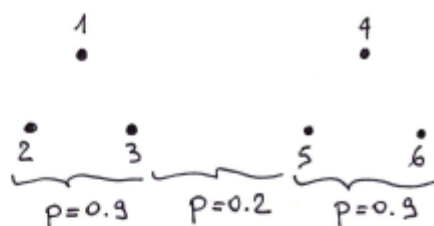
a) Utilizzando tale sequenza, creare una rete mediante Stochastic Block Model, composta da 2 blocchi di 3 nodi ciascuno, con probabilità di connessione intra-blocco pari a 0.9 e interblocco pari a 0.2, specificando la matrice di adiacenza e rappresentando la rete graficamente (*nota bene: vi sono più modi possibili di utilizzare la sequenza data per costruire la rete, specificare con precisione la procedura utilizzata*).

b) Calcolare la coverage e la performance della partizione corrispondente ai due blocchi.

c) Calcolare la probabilità di persistenza di ciascuno dei due blocchi.

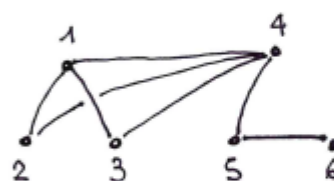
Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

③ a)



Listando ordinatamente le coppie di nodi (i,j) , con $(i,j) = 1,2,\dots,6$, $j > i$, il link esiste se e solo se $r < p$, con r preso ordinatamente dalla lista di numeri casuali.

(i,j)	r	p	link
1,2	0.48	0.9	1
1,3	0.80	0.9	1
1,4	0.14	0.2	1
1,5	0.42	0.2	0
1,6	0.81	0.2	0
2,3	0.91	0.9	0
2,4	0.12	0.2	1
2,5	0.91	0.2	0
2,6	0.63	0.2	0
3,4	0.09	0.2	1
3,5	0.27	0.2	0
3,6	0.54	0.2	0
4,5	0.85	0.9	1
4,6	0.96	0.9	0
5,6	0.15	0.9	1



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_i] = [3 \ 2 \ 2 \ 4 \ 2 \ 1]$$

$$2L = \sum_i k_i = 14$$

$$b) \ell = \sum_{h=1,2} \frac{L_h}{L} = \frac{2+2}{7} = \frac{4}{7}$$

$$P = \frac{|\{(i,j) \text{ nello stesso blocco e } a_{ij}=1\}| + |\{(i,j) \text{ in blocchi diversi e } a_{ij}=0\}|}{N(N-1)/2}$$

$$= \frac{4+6}{\frac{6 \times 5}{2}} = \frac{10}{15} = 0.667$$

$$c) \alpha_c = \frac{\sum_{i \in c} k_i^{INT}}{\sum_{i \in c} K_i}$$

$$\alpha_1 = \frac{2+1+1}{3+2+2} = \frac{4}{7} \approx 0.57 \quad \alpha_2 = \frac{1+2+1}{4+2+1} = \frac{4}{7} \approx 0.57$$

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 4 (6 punti)

k-core e k-shell: definizione e procedura di decomposizione.

Risposta [!!! non eccedere lo spazio di questa pagina !!!]:

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 5 (6 punti)

Modularità: definizione e proprietà.

Risposta [!!! non eccedere lo spazio di questa pagina !!!]:

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata = - 0.5, risposta non data = 0)

1) In una rete non diretta, non pesata, gli autovalori della matrice Laplaciana

- [1] possono essere reali o complessi, con parte reale non negativa.
- [2] sono tutti reali positivi.
- X [3] sono tutti reali non negativi.

2) Per piccoli valori del numero di nodi N , la distribuzione di grado di una rete Erdos-Renyi è

- X [1] binomiale.
- [2] power-law.
- [3] poissoniana.

3) In una rete non diretta, connessa, di integratori interagenti

- [1] non è detto venga raggiunto il consenso, dipende dalla topologia della rete.
- [2] il consenso è raggiunto, a un valore che dipende dalla topologia della rete.
- X [3] il consenso è raggiunto, a un valore che dipende dallo stato iniziale.

4) Il metodo Infomap per l'analisi di comunità è basato

- X [1] sull'analisi delle proprietà dei cammini casuali.
- [2] sulla comparazione della rete con una sua versione randomizzata.
- [3] sull'analisi dell'autovettore principale della matrice Laplaciana.

5) Dati due nodi i, j di una rete non diretta, la rete viene modificata nella sua struttura "lontano" dai nodi i, j (la modifica non riguarda cioè né i, j né i loro primi vicini). A causa di ciò

- [1] il "common neighbours index" s_{ij} può cambiare.
- X [2] il "Katz index" s_{ij} può cambiare.
- [3] il "preferential attachment index" s_{ij} può cambiare.