



POLITECNICO MILANO 1863

COMPLESSITA' NEI SISTEMI E NELLE RETI

Prof. C. Piccardi

Appello del 15/6/2026

COGNOME: _____ NOME: _____

Codice Persona: _____ Corso di laurea (INF, MTM, ...): _____

Firma dello studente: _____ Visto del docente: _____

5	5	5	6	6	5

Voto totale

32

AVVERTENZE

- Non è consentito consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone/watch, ecc.).

- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.

- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.

- Lo studente è tenuto a prendere visione delle **modalità d'esame dettagliate** alla pagina web del corso (<http://piccardi.faculty.polimi.it/csr.html>).

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 1 (5 punti)

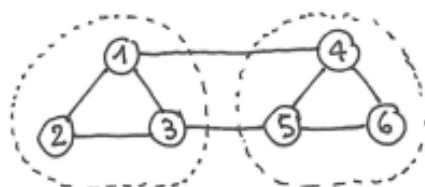
Si proponga una rete con $N = 6$ nodi partizionati in due comunità di 3 nodi ciascuna, in modo tale che la coverage $\mathcal{C}$ della partizione valga esattamente $\frac{3}{4}$.

- Verificare che si abbia effettivamente $\mathcal{C} = 3/4$ e calcolare la performance $\mathcal{P}$ della partizione.
- Calcolare la modularità della partizione.
- Calcolare la probabilità di persistenza delle due comunità.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

$$a) \mathcal{C} = \frac{1}{L} \sum_h L_h \quad \hookrightarrow \text{link interni alla comunità } h$$

$\mathcal{C} = \frac{3}{4}$ implica che $3/4$ dei link sono interni alle comunità, e $1/4$ inter-comunità.



$$\mathcal{C} = \frac{(3+3)}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\mathcal{P} = \frac{\text{(n. coppie (i,j) nella stessa comunità con } a_{ij}=1)}{\text{(n. coppie (i,j) in diverse comunità con } a_{ij}=0)} \bigg/ \frac{N(N-1)}{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad = \frac{6+7}{15} = \frac{13}{15}$$

grado totale della comunità h

$$b) Q = \sum_h \left[\frac{L_h}{L} - \left(\frac{K_h}{2L} \right)^2 \right] = \frac{2}{L} \times \left[\frac{3}{8} - \left(\frac{8^2}{16^2} \right) \right] = \frac{1}{4}$$

comunità identiche

$$c) \alpha_h = \frac{K_h^{INT}}{K_h} = \frac{\sum_{i \in C_h} K_i^{INT}}{\sum_{i \in C_h} K_i}$$

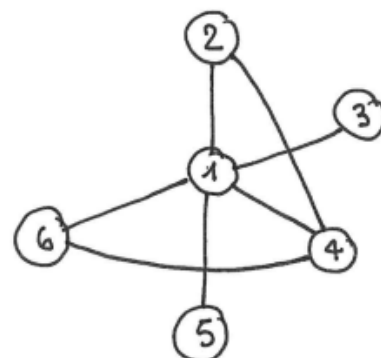
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{2+2+2}{3+2+3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 2 (5 punti)

Si consideri la rete in figura.

Per ciascuno dei tre criteri sottoelencati, determinare la similarità $[s_{ij}]$ tra ciascuna coppia di nodi e, in base a essa, stabilire qual è il link più verosimile tra quelli non esistenti.



- a) common neighbour
- b) resource allocation
- c) preferential attachment

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [k_i] = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) $s_{ij} = |B_i \cap B_j|$, B_i = insieme vicini di i

$$[s_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tra i link non esistenti (cerchiati), il più verosimile è $(2,6)$.

b) $s_{ij} = \sum_{h \in (B_i \cap B_j)} \frac{1}{k_h}$

$$[s_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{15} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il più verosimile è $(2,6)$.

c) $s_{ij} = k_i k_j$

$$[s_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 5 & 15 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il più verosimile è $(2,6)$.

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 3 (5 punti)

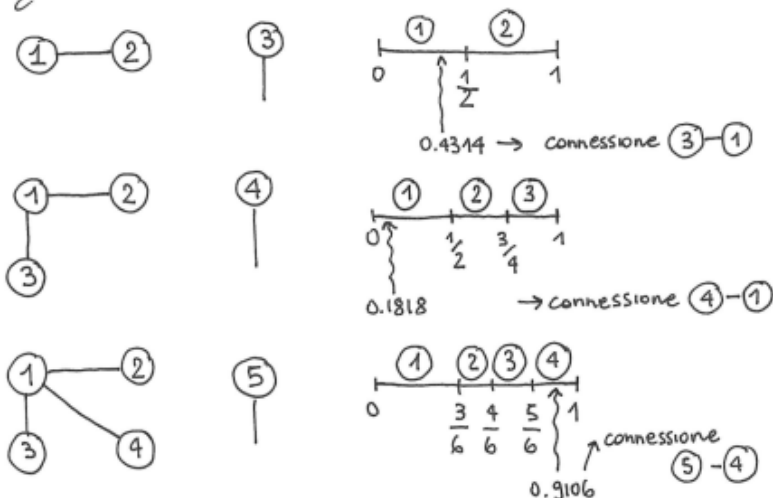
Abbiamo a disposizione un generatore di numeri casuali uniformemente distribuiti nell'intervallo $[0,1]$, i cui primi numeri estratti sono i seguenti:

0.4314 0.1818 0.9106 0.2638 0.1455 0.1361 0.8693 0.5797 0.5499 0.1450
0.1067 0.9619 0.0046 0.7749 0.8173 0.8687 0.0844 0.3998 0.2599 0.8001
...

- a) Utilizzando tale sequenza, e partendo da una rete iniziale composta da due nodi tra loro connessi (nodi 1 e 2), creare una rete Barabasi-Albert con $N = 5$ nodi complessivi e grado medio asintotico (cioè per $N \rightarrow \infty$) pari a 2. Specificare la matrice di adiacenza e rappresentare la rete graficamente (*nota bene: vi sono più modi possibili di utilizzare la sequenza data per costruire la rete, specificare con precisione la procedura utilizzata*).
- b) Calcolare l'effettivo grado medio della rete ottenuta e la sua densità.
- c) Calcolare la distanza media.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) Per $N \rightarrow \infty$ si ha $\langle K \rangle \rightarrow 2m$, da cui $m=1$ (=n. di link di ogni nuovo nodo inserito).



Ad oggi passo, si è usata una prob. di connessione proporzionale al grado corrente.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b) \langle K \rangle = \frac{2L}{N} = \frac{2 \times 4}{5} = 1.6$$

$$P = \frac{L}{\frac{N(N-1)}{2}} = \frac{4}{10} = 0.4$$

$$c) [d_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle d \rangle &= \frac{1}{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{i,j} d_{ij} \\ &= \frac{1}{10} \times 18 = 1.8 \end{aligned}$$

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 4 (6 punti)

Tra gli indicatori di centralità visti a lezione, discutere quelli dipendenti dalla nozione di random walk (fornire definizione dettagliata e breve interpretazione).

Risposta [!!! non eccedere lo spazio di questa pagina !!!]:

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 5 (6 punti)

Modello LFR (Lancichinetti-Fortunato-Radicchi): definizione e proprietà.

Risposta [!!! non eccedere lo spazio di questa pagina !!!]:

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata = - 0.5, risposta non data = 0)

1) Il valore della betweenness centrality del nodo i dipende, per tutte le coppie (j, k) con $j \neq i \neq k$,

- ☐ [1] da tutti i percorsi che collegano (j, k) .
- X [2] da tutti i percorsi più brevi che collegano (j, k) .
- [3] dai soli percorsi più brevi che collegano (j, k) che passano da i .

2) In una rete non diretta, non pesata, connessa, il nodo i di grado massimo ha grado $k_i = 24$. Se ne deduce che

- ☐ [1] il nodo i appartiene a tutti i k -core con $k \geq 24$.
- X [2] la rete ha momento secondo non superiore a 24^2 .
- [3] la rete possiede k -shell con k almeno pari a 24.

3) L'indice "common neighbours" che misura la similarità tra due nodi (i, j) tiene conto di tutti i percorsi

- X [1] di lunghezza 2 che uniscono (i, j) .
- [2] di lunghezza 3 che uniscono (i, j) .
- [3] di lunghezza qualunque che uniscono (i, j) .

4) Nel modello SIS su rete eterogenea con momento secondo $\langle k^2 \rangle$, a parità di tutto il resto, la quantità di individui (scelti casualmente) da vaccinare per estinguere l'epidemia

- X [1] cresce con $\langle k^2 \rangle$.
- [2] decresce con $\langle k^2 \rangle$.
- [3] è indipendente da $\langle k^2 \rangle$.

5) In un sistema di Kuramoto con N oscillatori, quando il parametro d'ordine tende a 1

- ☐ [1] tutti gli oscillatori tendono ad avere la stessa fase.
- X [2] tutti gli oscillatori tendono ad avere la stessa velocità angolare.
- [3] tutti gli oscillatori tendono a disporsi equidistanti sul cerchio trigonometrico.