POLITECNICO
MILANO 1863

COMPLESSITA' NEI SISTEMI E NELLE RETI

Prof. C. Piccardi
Appello del 11/2/2026

COGNOME:________________________ NOME: _______________________

Codice Persona: _____________________ Corso di laurea (INF, MTM, ...): _____

Firma dello studente: ___________________________ Visto del docente:_____

						Voto totale
5	5	5	6	6	5	32

AVVERTENZE

<u>- Non è consentito consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone/watch, ecc.).</u>

- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Lo studente è tenuto a prendere visione delle **modalità d'esame dettagliate** alla pagina web del corso (http://piccardi.faculty.polimi.it/csr.html).

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 1 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, descritta dalla seguente matrice di adiacenza:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per ciascun nodo, calcolare:

a) degree centrality
b) betweenness centrality
c) closeness centrality
d) random walk centrality
e) k-coreness

f) Per il solo nodo 4, calcolare l'information centrality.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) equivale al grado: $[k_i] = [1 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 2]$

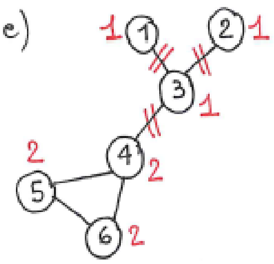
b) $[d_{ij}] = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ & & 0 & 1 & 2 & 2 \\ & & & 0 & 1 & 1 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{vmatrix}$ $\qquad [b_i] = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0+1+1+1+1+1+1+1 \\ 0+1+1+1+1+1+1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

$$b_i = \sum_{\substack{j,k \\ j \neq k \neq i}} \frac{n_{jk}(i)}{n_{jk}}$$

c) $\gamma_i = \dfrac{N-1}{\sum_j d_{ij}}$ $\qquad [\gamma_i] = \left| \dfrac{5}{11} \quad \dfrac{5}{11} \quad \dfrac{5}{7} \quad \dfrac{5}{7} \quad \dfrac{5}{10} \quad \dfrac{5}{10} \right|$

d) $\pi_i = \dfrac{k_i}{\sum_j k_j}$ $\qquad [\pi_i] = \left| \dfrac{1}{12} \quad \dfrac{1}{12} \quad \dfrac{3}{12} \quad \dfrac{3}{12} \quad \dfrac{2}{12} \quad \dfrac{2}{12} \right|$

e)

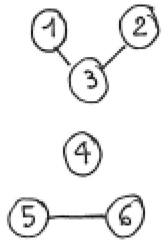


Esequita la k-shell decomposition, si ricava:

$[c_i] = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2]$

f) Per la rete data: $E = \dfrac{1}{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{j>i} \dfrac{1}{d_{ij}} = \dfrac{1}{15}\left(6 \cdot \dfrac{1}{1} + 5 \cdot \dfrac{1}{2} + 4 \cdot \dfrac{1}{3}\right) =$ 0.6556

Rimuovendo le connessioni del nodo 4:



$$[d_{ij}] = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ & & 0 & \infty & \infty & \infty \\ & & & 0 & \infty & \infty \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

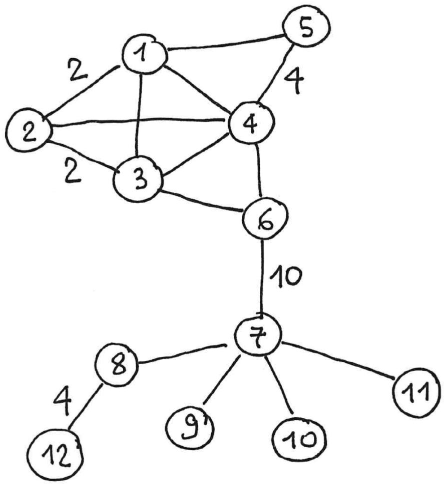
$E_4 = \dfrac{1}{15}\left(3 \cdot \dfrac{1}{1} + 1 \cdot \dfrac{1}{2}\right) =$ 0.2333

$I_4 = \dfrac{E - E_4}{E} = 0.6441$

<u>Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.</u>

Problema 2 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, pesata, rappresentata in figura, dove i pesi valgono 1 per tutti i link in cui non è diversamente specificato.



a) Determinare la probabilità di persistenza delle due sottoreti {1,2,3,4,5} e {6,7,8,9,10,11,12}.

Trascurando ora i pesi (cioè ponendoli tutti uguali a 1):

b) Nell'ipotesi che nella rete evolva un processo SIS con $\beta = \gamma = 1$, determinare la frazione di nodi da vaccinare (con selezione casuale) per immunizzare la popolazione.
c) Determinare la decomposizione k-shell della rete.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a)
$$\alpha_c = \frac{\sum_{i \in C_c} s_i^{int}}{\sum_{i \in C_c} s_i}$$

$$C_1 = \{1,2,\cdots,5\} : \quad \alpha_1 = \frac{5+5+4+7+5}{5+5+5+8+5} = \frac{26}{28} \simeq 0.93$$

$$C_2 = \{6,7,\cdots,12\} : \quad \alpha_2 = \frac{10+14+5+1+1+1+4}{12+14+5+1+1+1+4} = \frac{36}{38} \simeq 0.95$$

b) $g_c = 1 - \dfrac{\gamma \langle k \rangle}{\beta \langle k^2 \rangle}$

$k_i = | 4 \ 3 \ 4 \ 5 \ 2 \ 3 \ 5 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 |$

$\langle k \rangle = \dfrac{1}{N} \sum_i k_i = \dfrac{32}{12} \cong 2.67$

distr. di grado: $P(k) = \dfrac{\text{n. nodi con } k_i = k}{N}$

$\begin{cases} P(1) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}, \ P(2) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}, \ P(3) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}, \\ P(4) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}, \ P(5) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}, \ P(k) = 0 \ \forall \text{altro } k \end{cases}$

$\langle k^2 \rangle = \sum_k k^2 P(k) = 1 \cdot \dfrac{1}{3} + 4 \cdot \dfrac{1}{6} + 9 \cdot \dfrac{1}{6} + 16 \cdot \dfrac{1}{6} + 25 \cdot \dfrac{1}{6}$

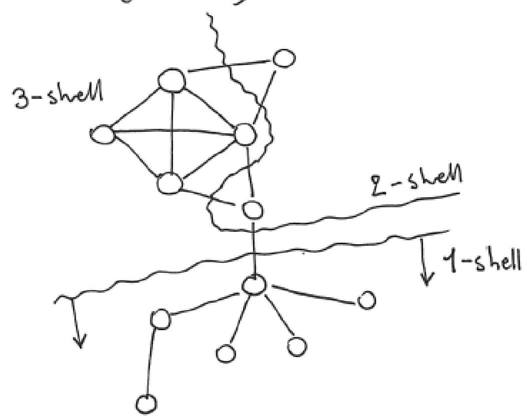
$= \dfrac{56}{6} \simeq 9.33$

$g_c = 1 - \dfrac{2.67}{9.33} = 0.714$

c) 1-shell : $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

2-shell : $\{5, 6\}$

3-shell : $\{1, 2, 3, 4\}$



<u>Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.</u>

Problema 3 (5 punti)

Abbiamo a disposizione un generatore di numeri casuali uniformemente distribuiti nell'intervallo [0,1], i cui primi numeri estratti sono i seguenti:

0.4314	0.9106	0.1818	0.2638	0.1455	0.1361	0.8693	0.5797	0.5499	0.1450
0.1067	0.9619	0.0046	0.7749	0.8173	0.8687	0.0844	0.3998	0.2599	0.8001

…

a) Utilizzando tale sequenza, creare una rete Erdos-Renyi con il modello $G(N,p)$ con 5 nodi e grado medio atteso pari a 2.4, specificando la matrice di adiacenza e rappresentando la rete graficamente *(nota bene: vi sono più modi possibili di utilizzare la sequenza data per costruire la rete, specificare con precisione la procedura utilizzata)*.
b) Calcolare l'effettivo grado medio della rete ottenuta e la sua densità.
c) Calcolare il coefficiente di clustering dei singoli nodi e dell'intera rete.

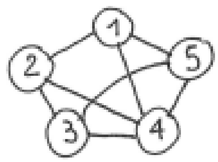
Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) grado medio atteso $\langle k \rangle = p(N-1) \Rightarrow p = \frac{2.4}{4} = 0.6$

Ordino le coppie di nodi (i,j) : $a_{ij} = 1$ se e solo se r (n. casuale) $< p = 0{,}6$, altrimenti $a_{ij} = 0$.

(i,j)	r	a_{ij}
1,2	0.43	1
1,3	0.91	0
1,4	0.18	1
1,5	0.26	1
2,3	0.14	1
2,4	0.13	1
2,5	0.86	0
3,4	0.57	1
3,5	0.54	1
4,5	0.14	1

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 & 1 \\ & (\text{sym}) & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{vmatrix}$$



b) $L = 8 \quad \langle k \rangle = \frac{2L}{N} = \frac{16}{5} = 3.2$

$$\rho = \frac{L}{\frac{N(N-1)}{2}} = \frac{8}{10} = 0.8$$

c) $$c_i = \begin{cases} 0, & \text{se } k_i \leq 1 \\ \dfrac{e_i}{\frac{k_i(k_i-1)}{2}}, & \text{se } k_i > 1 \end{cases}$$

$k_i = |3 \quad 3 \quad 3 \quad 4 \quad 3|$

$\frac{k_i(k_i-1)}{2} = |3 \quad 3 \quad 3 \quad 6 \quad 3|$

$e_i = |2 \quad 2 \quad 2 \quad 4 \quad 2|$

$c_i = \left|\frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{2}{3}\right|$

$C = \frac{1}{N}\sum_i c_i = \frac{2}{3}$

<u>Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..</u>

Domanda 4 (6 punti)

Tra gli indicatori di centralità visti a lezione, discutere quelli dipendenti dalla nozione di shortest path (fornire definizione dettagliata e breve interpretazione).

Risposta [!!! <u>non eccedere lo spazio di questa pagina</u> !!!]:

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 5 (6 punti)

Linear Threshold (LT) model (fornire definizione dettagliata).

Risposta [!!! non eccedere lo spazio di questa pagina !!!]:

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)

1) Il nodo i appartiene alla cosiddetta "IN component" di una rete diretta, la quale possiede anche una SCC e una "OUT component". Qualunque sia la rete, si può affermare che

[1] da almeno un nodo $j \in SCC$ esiste un percorso che raggiunge i.
[2] da almeno un nodo $j \in OUT$ esiste un percorso che raggiunge i.
X [3] dal nodo i esiste un percorso che raggiunge almeno un nodo $j \in OUT$.

2) Data una rete non diretta, non pesata, se la performance $\mathcal{P}$ associata a una data partizione è prossima a zero, si deduce che

[1] i link intra-comunità sono prevalenti rispetto ai link inter-comunità.
X [2] i link inter-comunità sono prevalenti rispetto ai link intra-comunità.
[3] i link inter-comunità bilanciano esattamente i link intra-comunità.

3) Nel modello "q-cascade" di cascata di guasti, un nodo viene rimosso quando

[1] il suo grado corrente è minore di q.
[2] la sua betweenness corrente è minore della frazione q della betweenness iniziale.
X [3] il suo grado corrente è minore della frazione q del grado iniziale.

4) Nel modello SIS su una rete omogenea con grado medio $\langle k \rangle$, a parità di tutto il resto, la quantità di infetti a transitorio esaurito

X [1] cresce con $\langle k \rangle$.
[2] decresce con $\langle k \rangle$.
[3] è indipendente da $\langle k \rangle$.

5) In una rete non diretta, non pesata, connessa, di N agenti "integratori" ($\dot{x}_i(t) = \dot{u}_i(t)$ per ogni i), quando il consenso viene raggiunto

[1] ogni x_i ha valore inferiore rispetto al proprio valore iniziale.
X [2] ogni x_i ha valore compreso tra il massimo e il minimo x_i presenti inizialmente.
[3] ogni x_i ha valore superiore rispetto al proprio valore iniziale.