POLITECNICO
MILANO 1863

COMPLESSITA' NEI SISTEMI E NELLE RETI

Prof. C. Piccardi
Appello del 23/1/2026

COGNOME:________________________ NOME: _______________________

Codice Persona: _____________________ Corso di laurea (INF, MTM, ...): _____

Firma dello studente: ___________________________ Visto del docente:_____

5	5	5	6	6	5

Voto totale
32

AVVERTENZE

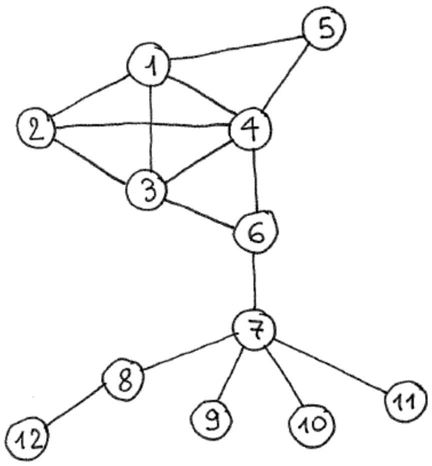
<u>- Non è consentito consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone/watch, ecc.).</u>

- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Lo studente è tenuto a prendere visione delle **modalità d'esame dettagliate** alla pagina web del corso (http://piccardi.faculty.polimi.it/csr.html).

<u>Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.</u>

Problema 1 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



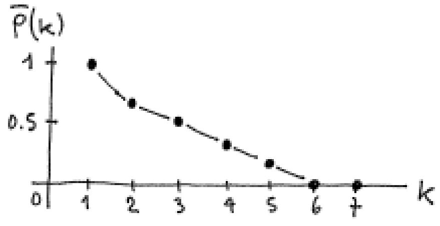
a) Calcolare e rappresentare graficamente la distribuzione di grado cumulata.
b) Calcolare la distribuzione di grado dei vicini.
c) Calcolare il coefficiente di clustering locale e globale.
d) Applicare il modello k-cascade di cascata di guasti con $k = 3$, calcolando la dimensione relativa della più grande componente connessa al termine della cascata.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) $k_i = | 4 \ 3 \ 4 \ 5 \ 2 \ 3 \ 5 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 |$

$$\bar{P}(k) = \frac{\text{n. nodi con } k_i \geq k}{N}$$

$$\bar{P}(k) = \begin{cases} \frac{12}{12} = 1 & , k = 1 \\ \frac{8}{12} = 0.66\bar{6} & , k = 2 \\ \frac{6}{12} = 0.5 & , k = 3 \\ \frac{4}{12} = 0.33\bar{3} & , k = 4 \\ \frac{2}{12} = 0.16\bar{6} & , k = 5 \\ 0 & , k \geq 6 \end{cases}$$



b) $Q(h) = \dfrac{h P(h)}{\langle k \rangle}$, dove $P(h) = \dfrac{\text{n. nodi con } k_i = k}{N}$

$\langle k \rangle = \dfrac{1}{N} \sum_i k_i = \dfrac{1}{12} 32 = \dfrac{8}{3} = 2.6\overline{6}$

$$Q(h) = \begin{cases} 1 \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{8} = \frac{12}{96} = \frac{1}{8} & , \quad h = 1 \\ 2 \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8} & , \quad h = 2 \\ 3 \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16} & , \quad h = 3 \\ 4 \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{4} & , \quad h = 4 \\ 5 \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{3}{8} = \frac{5}{16} & , \quad h = 5 \\ 0 & , \quad h \geq 6 \end{cases}$$

c) $C_i = \dfrac{e_i}{\frac{k_i(k_i-1)}{2}}$ $e_i \rightarrow$ n. di collegamenti tra i vicini del nodo i

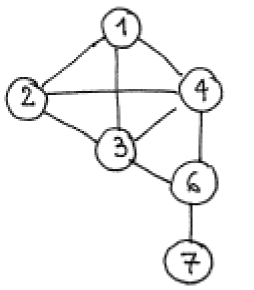
$e_i = | 4 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 |$

$C_i = | \frac{4}{6} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{5}{10} \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 |$

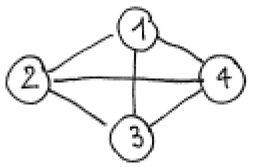
$$C = \frac{1}{N} \sum_i C_i = \frac{1}{12} \left(\frac{2}{3} + 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} \right) = 0.347$$

d) Un nodo è rimosso dalla rete quando il suo grado corrente è $< K$.

step 1: si rimuovono i nodi 5, 8, 9, 10, 11, 12



step 2: si rimuove il nodo 7.
step 3: si rimuove il nodo 6.
Fine della cascata (rimane il K-core):

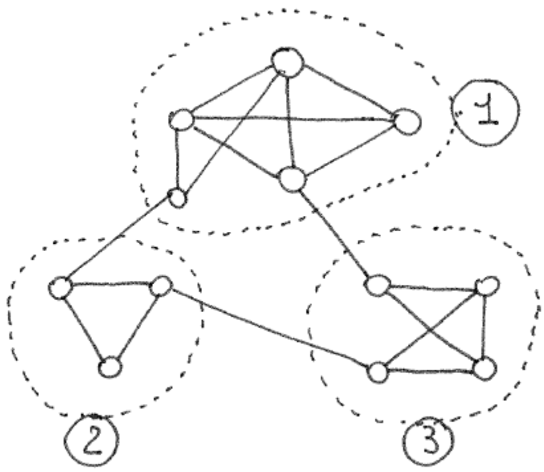


$$\frac{S}{N} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

<u>Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.</u>

Problema 2 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Calcolare la modularità associata alla partizione indicata in figura.
b) Calcolare la probabilità di persistenza di ciascuna delle tre sottoreti indicate in figura.
c) Determinare quale o quali nodi hanno la più alta random walk centrality, calcolandone il valore.
d) Con riferimento al laboratorio Gephi svolto a lezione, citare almeno un caso di studio di cui si è effettuata l'analisi di comunità.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) $$Q = \sum_{h=1,2,3} \left[\frac{L_h}{L} - \left(\frac{k_h}{2L} \right)^2 \right] =$$

$$\left[\frac{8}{19} - \left(\frac{18}{2 \times 19} \right)^2 \right] + \left[\frac{3}{19} - \left(\frac{8}{2 \times 19} \right)^2 \right] + \left[\frac{5}{19} - \left(\frac{12}{2 \times 19} \right)^2 \right] = 0.4737$$

b) $$\alpha_h = \frac{k_h^{int}}{k_h}$$

$$\alpha_1 = \frac{15}{18} = 0.83$$

$$\alpha_2 = \frac{6}{8} = 0.75$$

$$\alpha_3 = \frac{10}{12} = 0.83$$

c) $$\pi_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$: i nodi con la più alta r.w. centrality sono quelli con il grado più alto, pari a 4, i quali hanno:

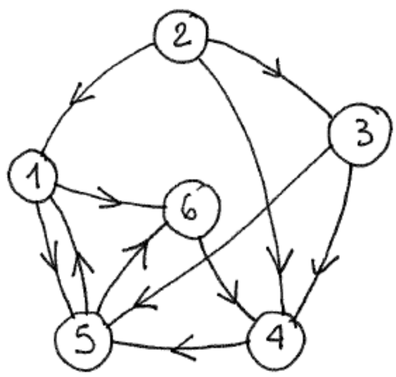
$$\pi_i = \frac{4}{2L} = \frac{4}{38} = 0.1053$$

d) Vedi registrazione.

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 3 (5 punti)

Si consideri la rete diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Determinare (se esistono) le componenti SCC, IN e OUT.
b) Determinare il grado medio entrante e il grado medio uscente.
c) Determinare i primi due passi di un random walker che parte dal nodo 1. A questo scopo, è disponibile un generatore di numeri casuali uniformemente distribuiti nell'intervallo [0,1], i cui primi numeri estratti sono, nell'ordine, i seguenti:

0.1622	0.7943	0.3112	0.5285	0.1656	0.6020	0.2630	0.6541	0.6892	0.7482
0.4505	0.0838	0.2290	0.9133	0.1524	0.8258	0.5383	0.9961	0.0782	0.4427

d) Determinare l'efficienza della rete.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

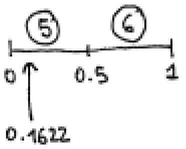
a) $SCC = \{1,4,5,6\}$: sottorete massimale connessa.
$IN = \{2,3\}$: da ogni nodo di IN esiste un percorso verso SCC.
$OUT = \emptyset$

b) $k_i^{IN} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ $\quad \langle k^{IN} \rangle = \frac{1}{N}\sum_i k_i^{IN} = \frac{11}{6}$

$k_i^{OUT} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad \langle k^{OUT} \rangle = \frac{1}{N}\sum_i k_i^{OUT} = \frac{11}{6}$

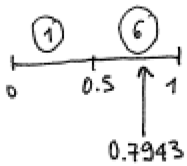
NB: $\langle k^{IN} \rangle = \langle k^{OUT} \rangle$ in ogni rete diretta.

c) passo 1 : $1 \to 5$, $1 \to 6$ $\quad P_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{K_i^{OUT}} \quad P_{15} = P_{16} = 0.5$



$\boxed{1 \to 5}$

passo 2 : $5 \to 1$, $5 \to 6$ $\quad P_{51} = P_{56} = 0.5$



$\boxed{5 \to 6}$

d) $$E = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} \frac{1}{d_{ij}}$$

$$[d_{ij}] = \begin{vmatrix} 0 & \infty & \infty & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & \infty & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & \infty & \infty & 0 & 1 & 2 \\ 1 & \infty & \infty & 2 & 0 & 1 \\ 3 & \infty & \infty & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$E = \frac{1}{30}\left[11 + 9 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{3}\right] = 0.528$$

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 4 (6 punti)

Indicatori per quantificare la qualità di partizioni e singole comunità.

Risposta [!!! non eccedere lo spazio di questa pagina !!!]:

<u>Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..</u>

Domanda 5 (6 punti)

Modello Barabasi-Albert: algoritmo di generazione e proprietà per $N \to \infty$.

Risposta [!!! <u>non eccedere lo spazio di questa pagina</u> !!!]:

<u>Indicare l’affermazione corretta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)</u>

1) Nella matrice Laplaciana di una rete non diretta, non pesata

[1] in ogni riga, fuori diagonale vi è uno e un solo elemento non nullo.

[2] ciascuna riga somma 0.

[3] ciascuna riga somma 1.

2) Quando due oscillatori periodici sincronizzano in fase

[1] la differenza tra le loro fasi varia nel tempo ma rimane limitata.

[2] la differenza tra le derivate delle loro fasi vale zero.

[3] la differenza tra le loro fasi vale zero.

3) In un processo SIS su rete eterogenea, la frazione di nodi di grado k infetti

[1] decresce con k e per $k \to \infty$ tende a 0.

[2] è indipendente da k.

[3] cresce con k e per $k \to \infty$ tende a 1.

4) Il modello Dorogovtsev-Mendes-Samukhin (DMS) genera una rete

[1] con distribuzione di grado uniforme ed elevato coefficiente di clustering.

[2] con distribuzione di grado power-law con esponente di valore arbitrario.

[3] con distribuzione di grado power-law con esponente $\gamma = -3$ ed elevato coefficiente di clustering.

5) In una rete non diretta, non pesata, i nodi che fanno parte della k-shell

[1] hanno grado k.

[2] hanno grado non inferiore a k.

[3] hanno grado non superiore a k.