POLITECNICO
MILANO 1863

COMPLESSITA' NEI SISTEMI E NELLE RETI

Prof. C. Piccardi
Appello del 8/9/2025

COGNOME:________________________ NOME: ______________________

Codice Persona: ____________________ Corso di laurea (INF, MTM, ...): _____

Firma dello studente: ___________________________ Visto del docente:_____

							Voto totale
5	5	5	6	6	5		32

AVVERTENZE

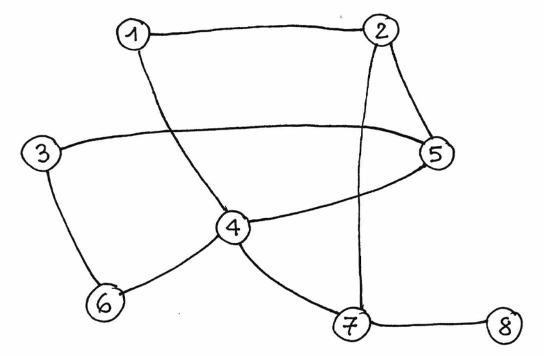
- Non è consentito consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone/watch, ecc.).

- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Lo studente è tenuto a prendere visione delle **modalità d'esame dettagliate** alla pagina web del corso (http://piccardi.faculty.polimi.it/csr.html).

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 1 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Calcolare distanza media, diametro ed efficienza della rete.
b) Calcolare la closeness centrality di ciascun nodo.
c) Calcolare il coefficiente di clustering locale e globale.
d) Calcolare il valore di Information Centrality per il solo nodo 4.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $[d_{ij}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ & 0 & 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ & & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ & & & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ & & & & 0 & 2 & 2 & 3 \\ & & & & & 0 & 2 & 3 \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{vmatrix}$

$$\langle d \rangle = \frac{1}{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{j>i} d_{ij} = \frac{1}{28} \cdot 54 = 1.9286$$

$$D = \max d_{ij} = 4$$

$$E = \frac{1}{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{j>i} \frac{1}{d_{ij}} = \frac{1}{28}\left(\frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{3} + 11 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{1}{1}\right) = 0.6339$$

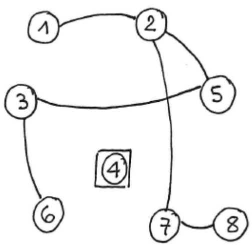
b) $\gamma_i = \dfrac{N-1}{\sum_j d_{ij}}$ $\quad [\gamma_i] = \left[\frac{7}{14} \; \frac{7}{12} \; \frac{7}{16} \; \frac{7}{10} \; \frac{7}{12} \; \frac{7}{14} \; \frac{7}{12} \; \frac{7}{18}\right]$

c) Non esistono triangoli nella rete, per cui $C_i = 0 \;\; \forall i$ e $C = 0$.

d) $I_4 = \dfrac{\Delta E_4}{E}$, dove $\Delta E_4 = E - E_4$

$\hookrightarrow$ efficienza della rete dopo rimozione dei link connessi al nodo 4.

(SEGUE →)



$$[d_{ij}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & \infty & 2 & 4 & 2 & 3 \\ & 0 & 2 & \infty & 1 & 3 & 1 & 2 \\ & & 0 & \infty & 1 & 1 & 3 & 4 \\ & & & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ & & & & 0 & 2 & 2 & 3 \\ & & & & & 0 & 4 & 5 \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

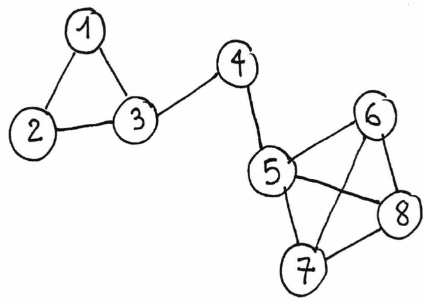
$$E_4 = \frac{1}{28}\left(\underbrace{7 \cdot \frac{1}{\infty}}_{=0} + 1 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{1}\right) = 0.4149$$

$$I_4 = \frac{0.6339 - 0.4149}{0.6339} = 0.3455$$

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 2 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Calcolare la modularità associata alla partizione {1,2,3} , {4} , {5,6,7,8}.
b) Calcolare la probabilità di persistenza di ciascuna delle tre sottoreti definite al punto a).
c) Determinare i momenti primo e secondo della distribuzione di grado.
d) Nell'ipotesi che nella rete evolva un processo SIS con $\beta = \gamma = 1$, determinare la frazione di nodi da vaccinare (con selezione casuale) per immunizzare la popolazione.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) $$Q = \sum_{h=1,2,3} \left[\frac{L_h}{L} - \left(\frac{k_h}{2L}\right)^2\right] =$$

$$= \left[\frac{3}{11} - \left(\frac{7}{22}\right)^2\right] + \left[\frac{0}{11} - \left(\frac{2}{22}\right)^2\right] + \left[\frac{6}{11} - \left(\frac{13}{22}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{9}{11} - \frac{7^2+2^2+13^2}{22^2} = 0.3595$$

b) $$\alpha_h = \frac{\sum_{i \in C_h} k_i^{INT}}{k_h}$$

$$\alpha_1 = \frac{2+2+2}{2+2+3} = \frac{6}{7} = 0.8571$$

$$\alpha_2 = \frac{0}{2} = 0$$

$$\alpha_3 = \frac{3+3+3+3}{3+3+3+4} = \frac{12}{13} = 0.9231$$

c) $$\langle k \rangle = \sum_k k P(k) = \frac{2L}{N} = \frac{22}{8} = 2.75$$

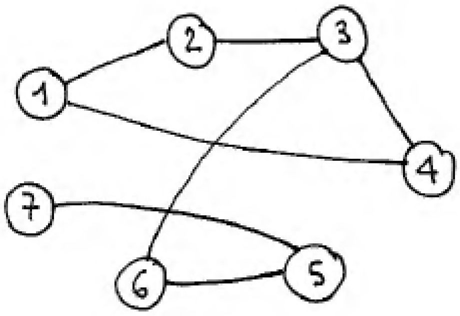
$$\langle k^2 \rangle = \sum_k k^2 P(k) = 2^2 \cdot \underbrace{\frac{3}{8}}_{=P(2)} + 3^2 \cdot \underbrace{\frac{4}{8}}_{=P(3)} + 4^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{8}}_{=P(4} = 8$$

d) $$g_c = 1 - \frac{\gamma}{\beta} \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle} = 1 - \frac{2.75}{8} = 0.6562$$

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 3 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Determinare la distribuzione di grado della rete e la distribuzione di grado dei vicini.
b) Determinare quali sono i 2 link mancanti più verosimili secondo i criteri *preferential attachment* e *common neighbors*.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

3 a) $[k_i] = [2\ \ 2\ \ 3\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 1]$, $N = 7$

$$P(k) = \frac{\text{n. nodi} \mid k_i = k}{N}$$

$P(1) = \frac{1}{7}$, $P(2) = \frac{5}{7}$, $P(3) = \frac{1}{7}$, $P(k) = 0\ \forall k > 3$

$Q(k) = \frac{k P(k)}{\langle k \rangle}$, $\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum k_i = \frac{14}{7} = 2$

$Q(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{14}$, $Q(2) = \frac{2}{2} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{7}$,

$Q(3) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{14}$, $Q(k) = 0\ \forall k > 3$

b)
$$[k_i k_j] = \left|\begin{array}{ccccccc} - & 4 & 6 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ & - & 6 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ & & - & 6 & 6 & 6 & 3 \\ & & & - & 4 & 4 & 2 \\ & & & & - & 4 & 2 \\ & & & & & - & 2 \\ & & & & & & - \end{array}\right|$$

Cerchiati i link NON presenti nella rete.

Link più verosimili: (1,3), (3,5)

$$|B_i \cap B_j| = \left|\begin{array}{ccccccc} - & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & - & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & - & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & - & 0 & 1 & 0 \\ & & & & - & 0 & 0 \\ & & & & & - & 1 \end{array}\right|$$

Link più verosimili: (1,3), (2,4)

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 4 (6 punti)

Stochastic Block Model: definizione, procedura di costruzione, casi notevoli.

Risposta [!!! non eccedere lo spazio di questa pagina !!!]:

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 5 (6 punti)

Modello di Kuramoto: ipotesi, equazione del singolo agente, equazione con interazione, condizione di sincronizzazione tra due agenti, parametro d'ordine.

Risposta [!!! non eccedere lo spazio di questa pagina !!!]:

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)

1) Il coefficiente di clustering globale C di una rete non diretta, non pesata, vale zero. Ne discende che

[1] nella rete non ci sono percorsi chiusi di lunghezza 3 né 4
[2] nella rete non ci sono percorsi chiusi di lunghezza 4
[3] nella rete non ci sono percorsi chiusi di lunghezza 3

2) In una rete non diretta, non pesata, connessa, il nodo i ha closeness centrality c_i. Se, pur mantenendo la rete connessa, uno dei collegamenti di i viene rimosso

[1] c_i può rimanere costante o aumentare
[2] c_i può rimanere costante o diminuire
[3] c_i diminuisce

3) Una rete creata con il modello LFR ha

[1] nodi con grado omogeneo e comunità con dimensione eterogenea
[2] nodi con grado omogeneo e comunità con dimensione omogenea
[3] nodi con grado eterogeneo e comunità con dimensione eterogenea

4) Nel modello di diffusione Independent Cascade (IC)

[1] un nodo Inattivo ha una e una sola occasione di essere attivato
[2] ogni nodo diventa Attivo per $t \to \infty$
[3] un nodo che diventa Attivo ha una e una sola occasione di attivare un vicino Inattivo

5) La sincronizzazione di fase tra due oscillatori periodici interagenti è agevolata tanto più

[1] l'accoppiamento tra i due oscillatori è debole
[2] la differenza tra le frequenze individuali degli oscillatori è piccola
[3] la differenza tra le frequenze individuali degli oscillatori è grande