POLITECNICO
MILANO 1863

COMPLESSITA’ NEI SISTEMI E NELLE RETI

Prof. C. Piccardi
Appello del 26/6/2025

COGNOME:________________________ NOME: ______________________

Codice Persona: ____________________ Corso di laurea (INF, MTM, ...): _____

Firma dello studente: __________________________ Visto del docente:_____

5	5	5	6	6	5

Voto totale
32

AVVERTENZE

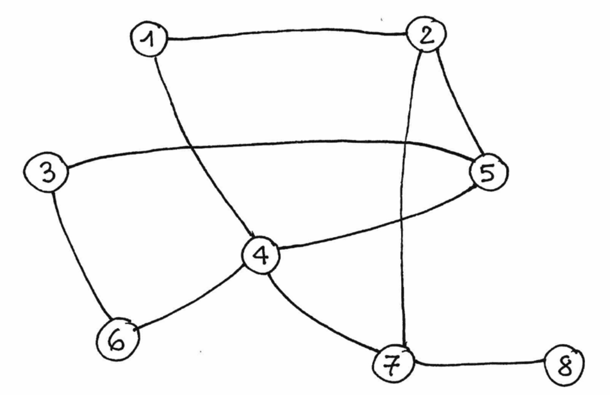
<u>- Non è consentito consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone/watch, ecc.).</u>

- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Lo studente è tenuto a prendere visione delle **modalità d’esame dettagliate** alla pagina web del corso (http://piccardi.faculty.polimi.it/csr.html).

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 1 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Riconoscere che si tratta di una rete bipartita proponendo un'opportuna partizione dei nodi; scrivere la relativa matrice di incidenza (bipartita).
b) Determinare le due proiezioni pesate della rete bipartita, ricavando le relative matrici di adiacenza (pesate) e rappresentando graficamente le due reti proiettate.
c) Calcolare la densità della rete data e delle due proiezioni bipartite.
d) Calcolare il coefficiente di clustering globale della rete data e delle due proiezioni bipartite.

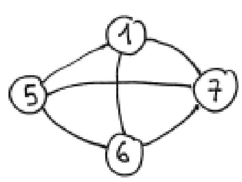
Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $S_1 = \{1, 7, 5, 6\}$ $S_2 = \{2, 4, 3, 8\}$

$$B = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 8 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}} \end{array}$$

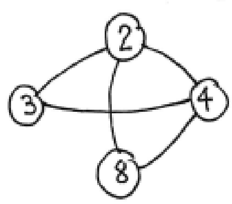
b) proiezione su S_1:

$$M_1 = BB^T - \mathrm{diag}(BB^T) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}$$



proiezione su S_2:

$$M_2 = B^TB - \mathrm{diag}(B^TB) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 8 \end{array}$$



c) $d = \dfrac{L}{\dfrac{N(N-1)}{2}}$

rete data: $N = 8$, $L = 10$, $d = 0.357$

M_1: $d = 1$ (è una clicque, rete completa)

M_2: $N = 4$, $L = 5$, $d = 0.833$

d) $C = \dfrac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} c_i$, $\quad c_i = \begin{cases} \dfrac{e_i}{\dfrac{k_i(k_i-1)}{2}}, & \text{se } k_i > 1 \\ 0, & \text{se } k_i \leq 1 \end{cases}$

rete data: $C = 0$ (non vi sono triangoli, come in ogni rete bipartita)

M_1: $C = 1$ (rete completa)

M_2: $[k_i] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$
$(i = 2 \quad 3 \quad 4 \quad 8)$

$\left[\dfrac{k_i(k_i-1)}{2}\right] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$[e_i] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

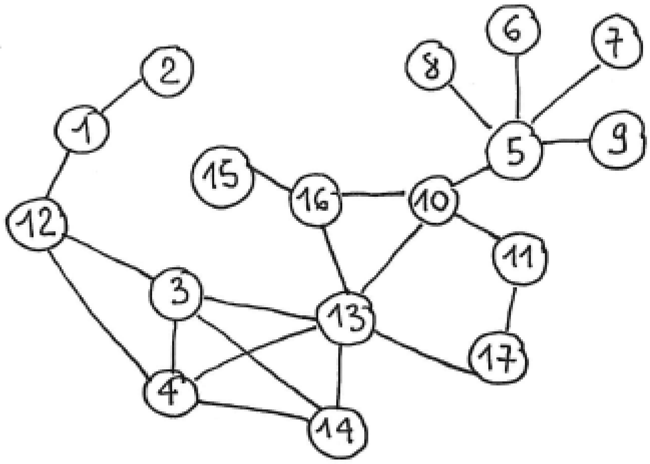
$[c_i] = \begin{bmatrix} 2/3 & 1 & 2/3 & 1 \end{bmatrix}$

$C = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{3} + 1 + \dfrac{2}{3} + 1\right) = \dfrac{5}{6} \cong 0.833$

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 2 (5 punti)

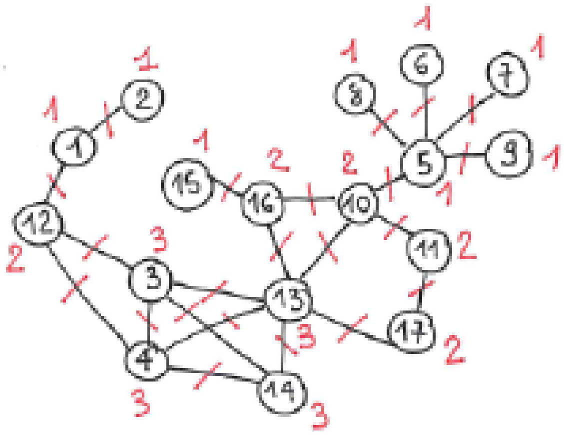
Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Determinare la centralità k-coreness di ciascun nodo.
b) Determinare la degree centrality di ciascun nodo.
c) Determinare la distribuzione di grado e calcolarne i momenti primo e secondo.
d) Determinare la distribuzione di grado cumulata.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a)



La k-coreness di un nodo è la sua k-shell di appartenenza.

b) $[k_i] = [2 \ 1 \ 4 \ 4 \ 5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 4 \ 2 \ 3 \ 6 \ 3 \ 1 \ 3 \ 2]$

$P(k) = \frac{n.\ nodi\ :\ k_i = k}{N}$

c) $P(1) = 6/17$, $P(2) = 3/17$, $P(3) = 3/17$, $P(4) = 3/17$,

$P(5) = 1/17$, $P(6) = 1/17$, $P(k) = 0 \quad \forall k > 6$

$$\langle k \rangle = \sum_k k P(k) = \frac{6}{17} + 2\frac{3}{17} + 3\frac{3}{17} + 4\frac{3}{17} + 5\frac{1}{17} + 6\frac{1}{17}$$

$$= 2.59$$

$$\langle k^2 \rangle = \sum_k k^2 P(k) = \frac{6}{17} + 4\frac{3}{17} + 9\frac{3}{17} + 16\frac{3}{17} + 25\frac{1}{17} + 36\frac{1}{17}$$

$$= 9.06$$

d) $$\bar{P}(k) = \frac{n.\ nodi\ :\ k_i \geq k}{N} = \sum_{k}^{\infty}{}_h P(h)$$

$\bar{P}(1) = \frac{17}{17} = 1$, $\bar{P}(2) = \frac{11}{17}$, $\bar{P}(3) = \frac{8}{17}$, $\bar{P}(4) = \frac{5}{17}$,

$\bar{P}(5) = \frac{2}{17}$, $\bar{P}(6) = \frac{1}{17}$, $\bar{P}(k) = 0 \quad \forall k > 6$

<u>Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.</u>

Problema 3 (5 punti)

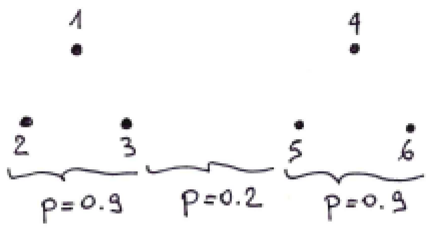
Abbiamo a disposizione un generatore di numeri casuali uniformemente distribuiti nell'intervallo [0,1], i cui primi numeri estratti sono i seguenti (l'ordine di lettura è da sinistra a destra, quindi dall'alto al basso):

0.4854	0.8003	0.1419	0.4218	0.8147	0.9058	0.1270	0.9134	0.6324	0.0975
0.2785	0.5469	0.8575	0.9649	0.1576	0.9706	0.9572	0.9157	0.7922	0.9595
0.6557	0.0357	0.8491	0.9340	0.6787	…				

a) Utilizzando tale sequenza, creare una rete mediante Stochastic Block Model, composta da 2 blocchi di 3 nodi ciascuno, con probabilità di connessione intra-blocco pari a 0.9 e interblocco pari a 0.2, specificando la matrice di adiacenza e rappresentando la rete graficamente (*nota bene: vi sono più modi possibili di utilizzare la sequenza data per costruire la rete, specificare con precisione la procedura utilizzata*).
b) Calcolare la modularità relativa alla partizione in cui ogni blocco è una comunità.
c) Calcolare la probabilità di persistenza dei due blocchi.

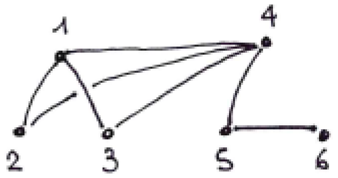
Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

③ a)



Listando ordinatamente le coppie di nodi (i,j), con (i,j) = 1,2,…,6, j>i, il link esiste se e solo se r<p, con r preso ordinatamente dalla lista di numeri casuali.

(i,j)	r	p	link
1,2	0.48	$\boxed{0.9}$	1
1,3	0.80	$\boxed{0.9}$	1
1,4	0.14	0.2	1
1,5	0,42	0.2	0
1,6	0.81	0.2	0
2,3	0,91	$\boxed{0.9}$	0
2,4	0.12	0.2	1
2,5	0.91	0.2	0
2,6	0.63	0.2	0
3,4	0.09	0.2	1
3,5	0.27	0.2	0
3,6	0.54	0.2	0
4,5	0.85	$\boxed{0.9}$	1
4,6	0.96	$\boxed{0.9}$	0
5,6	0.15	$\boxed{0.9}$	1



$$A = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

$$[k_i] = |3\ 2\ 2\ 4\ 2\ 1]$$

$$2L = \sum_i k_i = 14$$

b) $Q = \frac{1}{2L} \sum_{C_1, C_2} \sum_{i,j \in C_h} \left(a_{ij} - \frac{k_i k_j}{2L} \right)$

$$[k_i k_j] = \left| \begin{array}{ccc|ccc} 9 & 6 & 6 & 12 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 4 & 8 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 4 & 8 & 4 & 2 \\ \hline 12 & 8 & 8 & 16 & 8 & 4 \\ 6 & 4 & 4 & 8 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 2 & 1 \end{array} \right|$$

$$Q = \frac{1}{14} \left\{ \left[4 - \frac{49}{14} \right] + \left[4 - \frac{49}{14} \right] \right\} = 0.0714$$

c) $\alpha_c = \frac{\sum_{i \in c} k_i^{INT}}{\sum_{i \in c} K_i}$

$\alpha_1 = \frac{2+1+1}{3+2+2} = \frac{4}{7} \simeq 0.57 \qquad \alpha_2 = \frac{1+2+1}{4+2+1} = \frac{4}{7} \simeq 0.57$

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 4 (6 punti)

Misure di qualità per partizioni in comunità: coverage e performance, definizione e interpretazione

---

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 5 (6 punti)

Definire i concetti di rete connessa, debolmente connessa e fortemente connessa, e il concetto di componente.
Quindi fornire un esempio di rete diretta formata da 4 nodi, con una componente formata da 2 nodi, che sia debolmente ma non fortemente connessa.

Indicare l’affermazione corretta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)

1) In qualunque rete diretta

[1] la distribuzione del grado entrante e la distribuzione del grado uscente coincidono
[2] per ogni nodo, il grado entrante coincide con il grado uscente
[3] la media del grado entrante coincide con la media del grado uscente

2) Quando due oscillatori periodici sono sincronizzati in fase

[1] le loro fasi coincidono per ogni t
[2] le loro frequenze coincidono per ogni t
[3] le ampiezze dei loro segnali coincidono per ogni t

3) In una rete scale-free su cui evolve un processo SIR, la soglia epidemica

[1] è proporzionale al momento secondo della distribuzione di grado
[2] è inversamente proporzionale al grado medio
[3] è proporzionale al momento primo della distribuzione di grado

4) Il modello $G(N,p)$ per generare reti Erdos-Renyi produce una rete con distribuzione di grado

[1] approssimativamente Poissoniana, purché la rete sia di piccole dimensioni
[2] binomiale
[3] Gaussiana, purché $N \to \infty$

5) In una rete scale-free su cui evolve un processo di Kuramoto, la soglia di sincronizzazione

[1] è proporzionale al momento secondo della distribuzione di grado
[2] è inversamente proporzionale al grado medio
[3] è proporzionale al momento primo della distribuzione di grado