POLITECNICO
MILANO 1863

COMPLESSITA' NEI SISTEMI E NELLE RETI

Prof. C. Piccardi
Appello del 6/6/2025

COGNOME:________________________ NOME: _______________________

Codice Persona: _____________________ Corso di laurea (INF, MTM, ...): _____

Firma dello studente: ___________________________ Visto del docente:_____

5	5	5	6	6	5

Voto totale
32

AVVERTENZE

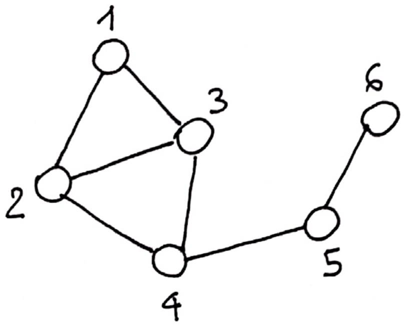
<u>- Non è consentito consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone/watch, ecc.).</u>

- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Lo studente è tenuto a prendere visione delle **modalità d'esame dettagliate** alla pagina web del corso (http://piccardi.faculty.polimi.it/csr.html).

<u>Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.</u>

Problema 1 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Calcolare distanza media, diametro ed efficienza della rete.
b) Calcolare il coefficiente di clustering di ogni nodo e quello globale.
c) Calcolare la betweenness centrality di ciascun nodo.
d) Calcolare la closeness centrality di ciascun nodo.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) $[d_{ij}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ & & 0 & 1 & 2 & 3 \\ & & & 0 & 1 & 2 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{vmatrix}$

$\langle d \rangle = \frac{1}{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{j>i} d_{ij} = \frac{1}{15}\, 28 = 1.87$

$D = \max d_{ij} = 4$

$E = \frac{1}{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{j>i} \frac{1}{d_{ij}} = \frac{1}{15}\left(7 \cdot \frac{1}{1} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$

$= 0.68$

c) $[b_i] = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 + 1/2 + 1/2 + 1/2 \\ 0 + 1/2 + 1/2 + 1/2 \\ 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 0 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix}$ $b_i = \sum_{j,k} \frac{n_{jk}(i)}{n_{jk}}$

d) $\gamma_i = \frac{N-1}{\sum_j d_{ij}}$ $[\gamma_i] = 5 / \begin{vmatrix} 11 \\ 8 \\ 8 \\ 7 \\ 9 \\ 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.45 \\ 0.625 \\ 0.625 \\ 0.71 \\ 0.56 \\ 0.38 \end{vmatrix}$

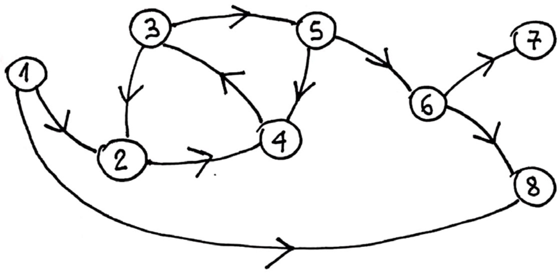
b) $c_i = \begin{cases} \frac{e_i}{\frac{k_i(k_i-1)}{2}}, & \text{se } k > 1 \\ 0, & \text{se } k \leq 1 \end{cases}$ $k_i = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ $c_i = \begin{vmatrix} 1/1 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

$C = \frac{1}{N} \sum_i c_i = \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{9}$

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 2 (5 punti)

Si consideri la rete diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Determinare le sottoreti SCC, IN e OUT.
b) Scrivere la matrice di transizione di un random walker, aggiungendo eventualmente autoanelli quando strettamente necessario.
c) Trascurando le direzioni (rete non diretta), determinare la randow walk centrality (probabilità di stato a regime) di ciascun nodo.
d) Trascurando le direzioni (rete non diretta), scrivere la matrice Laplaciana della rete.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $SCC = \{2, 3, 4, 5\}$ $\quad IN = \{1\}$ $\quad OUT = \{6, 7, 8\}$

b) $p_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{k_i^{OUT}}$ $\quad P = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\pi_i = \dfrac{k_i}{\sum_j k_j}$ $\quad [\pi_i] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} / 20$

d) $[k_i] = [2 \;\; 3 \;\; 3 \;\; 3 \;\; 3 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 2]$

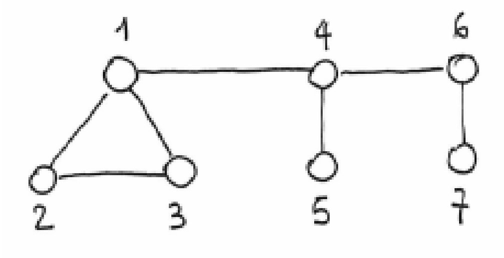
$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$L = diag(k_i) - A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 3 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata rappresentata in figura.



a) Calcolare la modularità associata alla partizione in 2 comunità: {1,2,3},{4,5,6,7}.
b) Calcolare la probabilità di persistenza delle 2 comunità.
c) Calcolare la modularità associata alla partizione in 3 comunità: {1,2,3},{4,5},{6,7}.
d) Calcolare la probabilità di persistenza delle 3 comunità.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \left[\frac{k_i k_j}{2L}\right] = \frac{1}{14} \begin{vmatrix} 9 & 6 & 6 & & & & \\ 6 & 4 & 4 & & & & \\ 6 & 4 & 4 & & & & \\ & & & 9 & 3 & 6 & 3 \\ & & & 3 & 1 & 2 & 1 \\ & & & 6 & 2 & 4 & 2 \\ & & & 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$[k_i] = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

a) partizione $\{1,2,3\},\{4,5,6,7\}$

$$Q = \frac{1}{2L} \sum_{C_1,C_2} \sum_{i,j \in C_h} \left(a_{ij} - \frac{k_i k_j}{2L}\right) = \frac{1}{14}\left\{\left(6 - \frac{49}{14}\right) + \left(6 - \frac{49}{14}\right)\right\}$$

$$= 0.3571$$

b) $\alpha_c = \frac{\sum_{i \in c} k_i^{INT}}{\sum_{i \in c} k_i}$: $\alpha_1 = \frac{2+2+2}{3+2+2} = \frac{6}{7} \simeq 0.86$, $\alpha_2 = \frac{2+1+2+1}{3+1+2+1} = \frac{6}{7}$

c) partizione $\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,7\}$

$$Q = \frac{1}{2L} \sum_{C_1,C_2,C_3} \sum_{i,j \in C_h} \left(a_{ij} - \frac{k_i k_j}{2L}\right) = \frac{1}{14}\left\{\left(6 - \frac{49}{14}\right) + \left(2 - \frac{16}{14}\right) + \left(2 - \frac{9}{14}\right)\right\} = 0.34$$

d) $\alpha_1 = \frac{6}{7}$ (come sopra), $\alpha_2 = \frac{1+1}{3+1} = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = \frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3} \simeq 0.66$

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 4 (6 punti)

Eigenvector centrality: definizione, interpretazione, proprietà

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 5 (6 punti)

k-core decomposition: definizione e procedura

<u>Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)</u>

1) Per ogni rete e per ogni possibile partizione, la modularità Q prende valori nell'intervallo

[1] $(0,1)$
[2] $[0,1]$
[3] $[-1,1]$

2) Per ogni rete e per ogni possibile partizione, la coverage C prende valori nell'intervallo

[1] $[0,+\infty)$
[2] $[0,1]$
[3] $[-1,1]$

3) In una rete non diretta e connessa di N integratori tra loro interagenti in modo diffusivo, gli agenti tendono a un valore di consenso

[1] che non dipende dallo stato iniziale
[2] che dipende dallo stato iniziale
[3] che dipende dallo stato iniziale, se e solo se la rete è completa

4) In una rete Barabasi-Albert, per $N \to \infty$,

[1] la distribuzione di grado cumulata è proporzionale a $1/k^3$ e il coefficiente di clustering tende a zero
[2] la distribuzione di grado è proporzionale a $1/k^3$ e il coefficiente di clustering tende a uno
[3] la distribuzione di grado è proporzionale a $1/k^3$ e il coefficiente di clustering tende a zero

5) Nel modello "maximum capacity" (Motter-Lai) di failure propagation, il nodo i viene rimosso

[1] se ha perso almeno q dei vicini iniziali
[2] se la betweenness del nodo supera la sua capacità
[3] se il nodo non ha più un percorso che lo connette a ciascun altro nodo