POLITECNICO
MILANO 1863

COMPLESSITA' NEI SISTEMI E NELLE RETI

Prof. C. Piccardi
Appello del 4/2/2025

COGNOME:________________________ NOME: ______________________

Codice Persona: ____________________ Corso di laurea (INF, MTM, ...): _____

Firma dello studente: __________________________ Visto del docente:_____

5	5	5	6	6	5

Voto totale
32

AVVERTENZE

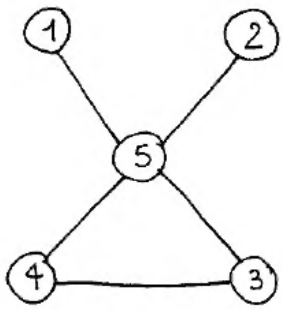
<u>- Non è consentito consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone/watch, ecc.).</u>

- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Lo studente è tenuto a prendere visione delle **modalità d'esame dettagliate** alla pagina web del corso (http://piccardi.faculty.polimi.it/csr.html).

<u>Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.</u>

Problema 1 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Determinare diametro, distanza media ed efficienza della rete.
b) Determinare la betweennes centrality di ogni nodo.
c) Determinare la random walk centrality di ogni nodo.
d) Partendo dal nodo 1, determinare il core-periphery profile della rete specificando la sequenza di insiemi $S_1, \dots, S_5$ e la sequenza di probabilità di persistenza $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ (*motivare i passaggi compiuti*).

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) $[d_{ij}] = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ & 0 & 2 & 2 & 1 \\ & & 0 & 1 & 1 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{vmatrix}$

$D = \max_{i,j} d_{ij} = 2$

$\langle d \rangle = \dfrac{1}{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{j>i} d_{ij} = \dfrac{15}{10} = 1.5$

$E = \dfrac{1}{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{j>i} \dfrac{1}{d_{ij}} = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{1}\right) = 0.75$

b) $[b_i] = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0+1+1+1+1+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{vmatrix}$

$b_i = \sum_{j,h} \dfrac{n_{jh}(i)}{n_{jh}}$

c) $\pi_i = \dfrac{k_i}{\sum_j k_j}$ $\quad [\pi_i] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} / 10 = \begin{vmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{vmatrix}$

d) $S_1 = \{1\}$, $\alpha_1 = 0$

Aggiungo $i = 2$ perché non connesso a S_1.

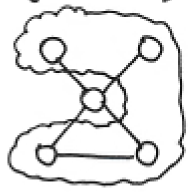
$S_2 = \{1, 2\}$, $\alpha_2 = 0$

Aggiungo $i = 3$ perché non connesso a S_2.

$S_3 = \{1, 2, 3\}$, $\alpha_3 = 0$

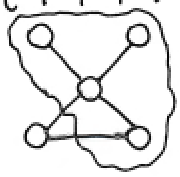
Tra $i = 4$ o 5, aggiungo il nodo che ottiene la minima α_4:

$\{1, 2, 3, 4\}$



$$\alpha_4' = \frac{\sum_i k_i^{INT}}{\sum_i k_i} = \frac{0+0+1+1}{1+1+2+2} = \frac{1}{3}$$

$\{1, 2, 3, 5\}$



$$\alpha_4'' = \frac{1+1+1+3}{1+1+2+4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} > \alpha_4'$$

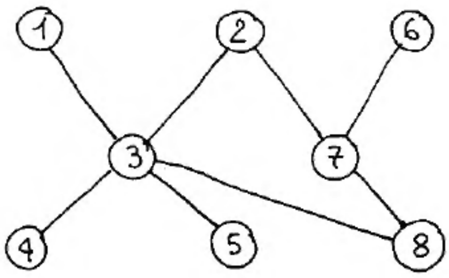
Quindi $S_4 = \{1, 2, 3, 4\}$, $\alpha_4 = 1/3$

Infine $S_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\alpha_5 = 1$.

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 2 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Determinare la distribuzione di grado della rete e i suoi momenti primo e secondo.
b) Determinare la distribuzione di grado dei vicini e la media di tale distribuzione.
c) Determinare la modularità della partizione $P = \{\{1,2,3,4,5\},\{6,7,8\}\}$ e la probabilità di persistenza delle due comunità.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) sequenza di grado: $[k_i] = |1\ 2\ 5\ 1\ 1\ 1\ 3\ 2|$

$P(k) = \frac{\text{n. nodi } | k_i = k}{N}$ $\quad P(1) = \frac{4}{8} \quad P(4) = 0$

$P(2) = \frac{2}{8} \quad P(5) = \frac{1}{8}$

$P(3) = \frac{1}{8} \quad P(k) = 0 \ \forall k \geq 6$

$<k> = \sum_k kP(k) = \frac{4}{8} + 2\times\frac{2}{8} + 3\times\frac{1}{8} + 5\times\frac{1}{8} = 2 = \frac{1}{N}\sum_i k_i$

$<k^2> = \sum_k k^2 P(k) = \frac{4}{8} + 4\times\frac{2}{8} + 9\times\frac{1}{8} + 25\times\frac{1}{8} = 5.75$

b) $Q(h) = \frac{hP(h)}{<k>}$ $\quad Q(1) = \frac{1\times\frac{4}{8}}{2} = \frac{1}{4} \quad Q(4) = 0$

$Q(2) = \frac{2\times{}^2\!/_8}{2} = \frac{1}{4} \quad Q(5) = \frac{5\times\frac{1}{8}}{2} = \frac{5}{16}$

$<h> = \sum_h hQ(h) =$ $\quad Q(3) = \frac{3\times{}^1\!/_8}{2} = \frac{3}{16} \quad Q(h) = 0 \ \forall h \geq 6$

$= k_{nn} = \frac{<k^2>}{<k>} = \frac{5.75}{2} = 2.875$

c) $Q = \sum_{c=1,2,\dots,q}\left[\frac{L_c}{L} - \left(\frac{k_c}{2L}\right)^2\right] = \left[\frac{4}{8} - \left(\frac{10}{16}\right)^2\right] + \left[\frac{2}{8} - \left(\frac{6}{16}\right)^2\right]$

$(L = 8)$ $\quad = 0.2188$

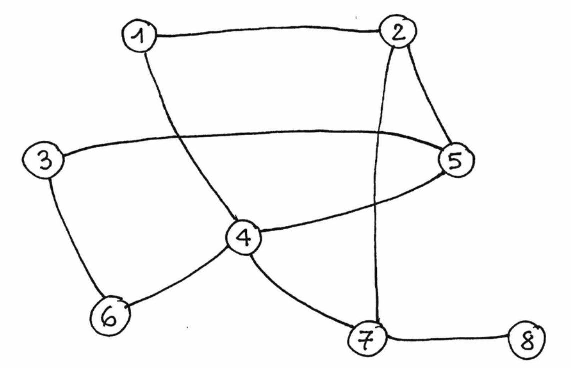
$\alpha_1 = \frac{\sum_{i\in C_1} k_i^{INT}}{\sum_{i \in C_1} k_i} = \frac{1+1+4+1+1}{1+2+5+1+1} = \frac{8}{10} = 0.8$

$\alpha_2 = \frac{1+2+1}{1+3+2} = \frac{4}{6} = 0.667$

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 3 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Riconoscere che si tratta di una rete bipartita proponendo un'opportuna partizione dei nodi; scrivere la relativa matrice di incidenza (bipartita).
b) Determinare le due proiezioni pesate della rete bipartita, ricavando le relative matrici di adiacenza (pesate) e rappresentando graficamente le due reti proiettate.
c) Calcolare la densità della rete data e delle due proiezioni bipartite.
d) Calcolare il coefficiente di clustering globale della rete data e delle due proiezioni bipartite.

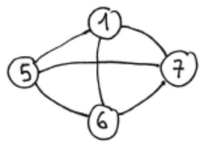
Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $S_1 = \{1, 7, 5, 6\}$ $\quad S_2 = \{2, 4, 3, 8\}$

$$B = \begin{array}{c|cccc|} & 2 & 3 & 4 & 8 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

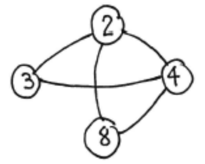
b) proiezione su S_1:

$$M_1 = BB^T - \text{diag}(BB^T) = \left|\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} 1 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}$$



proiezione su S_2:

$$M_2 = B^TB - \text{diag}(B^TB) = \left|\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 8 \end{array}$$



c) $d = \dfrac{L}{\frac{N(N-1)}{2}}$

rete data: $N = 8$, $L = 10$, $d = 0.357$

M_1: $d = 1$ (è una clicque, rete completa)

M_2: $N = 4$, $L = 5$, $d = 0.833$

d) $C = \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} {}_i \, C_i \,, \qquad C_i = \begin{cases} \dfrac{e_i}{\dfrac{k_i(k_i-1)}{2}} \,, & \text{se } k_i > 1 \\ 0 \,, & \text{se } k_i \leq 1 \end{cases}$

rete data : $C = 0$ (non vi sono triangoli, come in ogni rete bipartita)

M_1: $C = 1$ (rete completa)

M_2: $[k_i] = [3 \quad 2 \quad 3 \quad 2]$
$(i = 2 \quad 3 \quad 4 \quad 8)$

$$\left[\frac{k_i(k_i-1)}{2}\right] = [3 \quad 1 \quad 3 \quad 1]$$

$$[e_i] = [2 \quad 1 \quad 2 \quad 1]$$

$$[c_i] = [2/3 \quad 1 \quad 2/3 \quad 1]$$

$$C = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} + 1 + \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{5}{6} \cong 0.833$$

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 4 (6 punti)

Similarità tra nodi: indicatori e loro interpretazione.

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 5 (6 punti)

Modello di Kuramoto: definizione del modello e del parametro d'ordine (*non è richiesta la discussione delle proprietà del modello*).

<u>Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)</u>

1) Nelle reti pesate ($w_{ij} \geq 0$ per ogni i, j), l'efficienza E prende valori in

[1] $(-\infty, +\infty)$
[2] $[0,1]$
XXX [3] $[0, +\infty)$

2) Data una rete non diretta, non pesata, connessa, e una sua partizione avente modularità Q e coverage C, vale sempre la seguente relazione:

XXX [1] $C > Q$
[2] $C < Q$
[3] $C = Q$

3) In una rete diretta in cui esistono le sottoreti IN, SCC, OUT, un percorso che unisce un nodo di IN a un nodo di OUT

[1] include sicuramente almeno un nodo della SCC
[2] include sicuramente almeno un link della SCC
XXX [3] può non includere alcun nodo/link della SCC

4) In una rete diretta, pesata, priva di auto-anelli, con matrice dei pesi W, la densità ρ coincide con

[1] la frazione di elementi unitari di W, divisa per 2
[2] la frazione di elementi non nulli di W
XXX [3] la frazione di elementi non nulli nei termini non diagonali di W

5) Nel modello KQ-cascade, fissato un valore di soglia q, il nodo i viene rimosso

[1] sicuramente, se il nodo ha perso almeno q dei vicini iniziali
XXX [2] con probabilità f, se il nodo ha perso almeno la frazione q dei vicini iniziali
[3] con probabilità f, se il nodo ha perso almeno q dei vicini iniziali