POLITECNICO
MILANO 1863

COMPLESSITA' NEI SISTEMI E NELLE RETI

Prof. C. Piccardi
Appello del 13/1/2025

COGNOME:________________________ NOME: ______________________

Codice Persona: ____________________ Corso di laurea (INF, MTM, ...): _____

Firma dello studente: __________________________ Visto del docente:_____

							Voto totale
5	5	5	6	6	5		32

AVVERTENZE

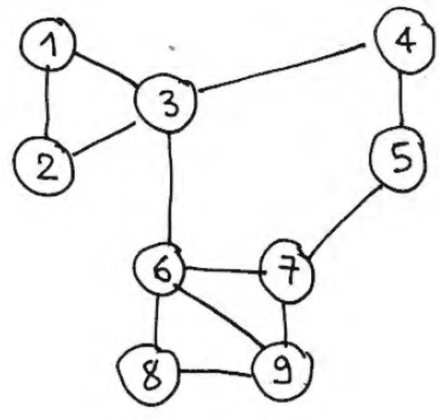
- Non è consentito consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone/watch, ecc.).

- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Lo studente è tenuto a prendere visione delle **modalità d'esame dettagliate** alla pagina web del corso (http://piccardi.faculty.polimi.it/csr.html).

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 1 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Calcolare la modularità associata alla partizione {1,2,3}, {4,5}, {6,7,8,9}.
b) Calcolare la Coverage C e la Performance P della partizione.
c) Calcolare la probabilità di persistenza di ciascuna delle tre comunità definite al punto a).
d) Calcolare il grado medio e la densità della rete.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $Q = \sum_{h=1,2,3} \left[\frac{L_h}{L} - \left(\frac{(k_h)}{2L} \right)^2 \right] =$

$(L = 12)$

$[k_i] = | \underbrace{2\ 2\ 4}, \underbrace{2\ 2}, \underbrace{4\ 3\ 2\ 3} |$

$= \left[\frac{3}{12} - \left(\frac{8}{24}\right)^2 \right] + \left[\frac{1}{12} - \left(\frac{4}{24}\right)^2 \right] +$

$+ \left[\frac{\cancel{8}5}{12} - \left(\frac{12}{24}\right)^2 \right] = 0.3611$

b) $C = \sum_{h=1,2,3} \frac{L_h}{L} = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12} = 0.75$

$P = \frac{(\text{n. di } a_{ij}=1 \text{ con } (i,j) \text{ nella stessa comunità}) + (\text{n. di } a_{ij}=0 \text{ con } (i,j) \text{ in differenti comunità})}{N(N-1)}$

$N(N-1)$ ↯ TOT. coppie (i,j)

$$A = \left| \begin{array}{ccc|cc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & 0 \end{array} \right|$$

conto zeri e uni solo sopra la diagonale, divido per $N(N-1)/2$:

$P = (9 + 23) \Big/ \frac{9 \cdot 8}{2} = 0.8889$

c) $\alpha_h = \dfrac{\sum_{i \in C_h} k_i^{INT}}{\sum_{i \in C_h} k_i}$

$$\alpha_1 = \frac{2+2+2}{2+2+4} = 0.75$$

$$\alpha_2 = \frac{1+1}{2+2} = 0.5$$

$$\alpha_3 = \frac{3+2+2+3}{4+3+2+3} = 0.8333$$

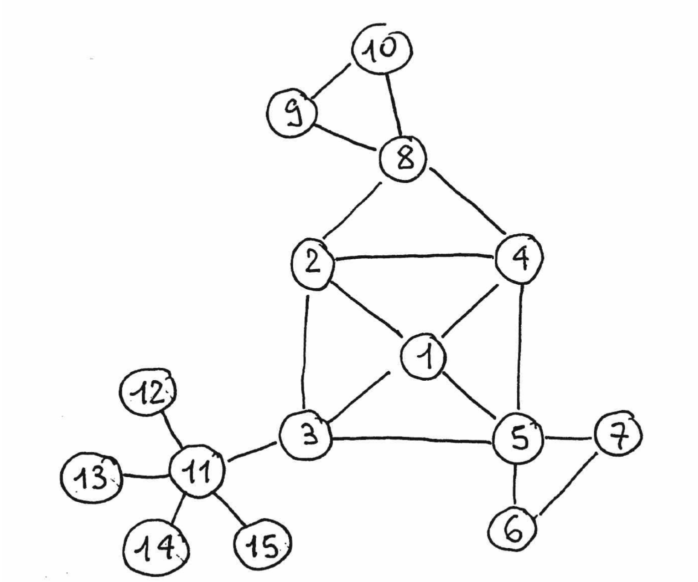
d) $\langle k \rangle = \dfrac{2L}{N} = \dfrac{24}{9} = 2.6667$

$$p = \frac{L}{\frac{N(N-1)}{2}} = \frac{12}{\frac{9 \cdot 8}{2}} = 0.3333$$

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 2 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Determinare e rappresentare graficamente la distribuzione di grado cumulata.
b) Determinare la decomposizione k-shell.
c) Analisi di robustezza agli attacchi: Rimuovere un nodo alla volta in ordine decrescente di grado (scegliendo il nodo di etichetta più bassa in caso di ex-aequo), calcolando ogni volta la dimensione relativa S_i della più grande componente connessa in funzione del numero i di nodi rimossi (*svolgere l'analisi almeno fino a* $i = 5$).

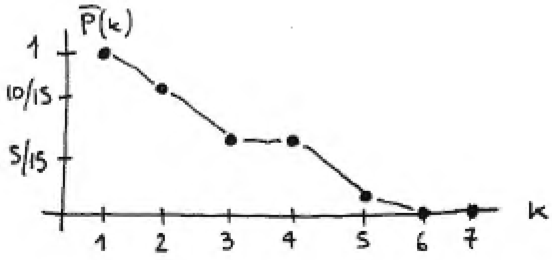
Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $[k_i] = | 4\ 4\ 4\ 4\ 5\ 2\ 2\ 4\ 2\ 2\ 5\ 1\ 1\ 1\ 1 |$

$\overline{P}(k) = \dfrac{\text{n. nodi con } k_i \geq k}{N}$

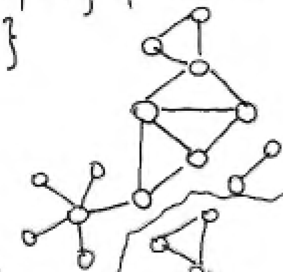
$\overline{P}(1) = \dfrac{15}{15} = 1$, $\overline{P}(2) = \dfrac{11}{15}$, $\overline{P}(3) = \dfrac{7}{15} = \overline{P}(4)$,

$\overline{P}(5) = \dfrac{2}{15}$, $\overline{P}(k) = 0 \quad \forall k \geq 6$



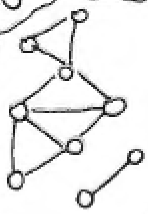
b) 1-shell = $\{11, 12, 13, 14, 15\}$, 2-shell = $\{6, 7, 8, 9, 10\}$,
3-core = $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

c) Rimuovo 5 :
(i=1)



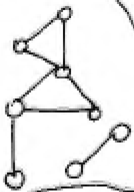
$S_1 = \frac{12}{15} = 0.8$

Rimuovo 11 :
(i=2)



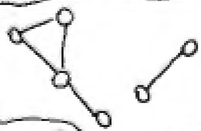
$S_2 = \frac{7}{15} = 0.4667$

Rimuovo 1 :
(i=3)



$S_3 = \frac{6}{15} = 0.4$

Rimuovo 2
(i=4)



$S_4 = \frac{4}{15} = 0.2667$

Rimuovo 4
(i=5)

$S_5 = \frac{3}{15} = 0.2$

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 3 (5 punti)

Si costruisca una rete bipartita contenente 4 nodi nell'insieme S_1 e 3 nodi nell'insieme S_2. La rete venga costruita in modo puramente casuale, in modo tale che la probabilità di esistenza di ciascuna connessione tra un nodo di S_1 e un nodo di S_2 sia pari a $p = 0.4$.

A questo scopo, è disponibile un generatore di numeri casuali uniformemente distribuiti nell'intervallo [0,1], i cui primi numeri estratti sono, nell'ordine, i seguenti:

0.1622	0.7943	0.3112	0.5285	0.1656	0.6020	0.2630	0.6541	0.6892	0.7482
0.4505	0.0838	0.2290	0.9133	0.1524	0.8258	0.5383	0.9961	0.0782	0.4427

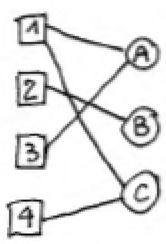
a) Scrivere la matrice di incidenza della rete ottenuta e rappresentarla graficamente *(nota bene: specificare con precisione la procedura utilizzata)*.
b) Determinare la proiezione (pesata) sull'insieme S_1, scrivendo la matrice dei pesi della rete ottenuta e rappresentandola graficamente.
c) Tornando alla rete originale (bipartita), determinare i primi 3 passi di un random walker a partire da uno dei nodi dell'insieme S_1 aventi grado più elevato. A tale scopo, utilizzare ancora la sequenza casuale sopra riportata a partire dal primo numero non impiegato al punto a) *(nota bene: specificare con precisione la procedura utilizzata)*.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

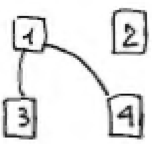
a) Matrice di incidenza $B = [b_{ij}]$ di dim. 4×3.
Scorro la matrice per righe: $b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, \cdots,$
e pongo $b_{ij} = 1$ se $r < p = 0.4$, $b_{ij} = 0$ altrimenti.
r (n. casuale in $[0,1]$ uniforme).

Si ottiene: $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

P.e.: $0.1622 < 0.4 \Rightarrow b_{11} = 1$
$0.7943 > 0.4 \Rightarrow b_{12} = 0$
$\vdots$



b) $W = BB^T - \text{diag}(BB^T) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$



c) nodo 1

1° step

0 A 0.5 C 1

$0.2290 < 0.5 \Rightarrow A$

$$p_{ij} = \frac{a_{ij}}{K_i}$$

nodo A

2° step

0 $\boxed{1}$ 0.5 $\boxed{3}$ 1

$0.9133 > 0.5 \Rightarrow \boxed{3}$

nodo 3

3° step

0 A 1

$0.1524 < 1 \Rightarrow A$

<u>Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..</u>

Domanda 4 (6 punti)

Stochastic Block Model: definizione e casi notevoli.

<u>Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..</u>

Domanda 5 (6 punti)

Modello Linear Threshold (LT) di contagio sociale: definizione.

<u>Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)</u>

1) In una rete non pesata, l'efficienza E prende valori in

[1] $(-\infty, +\infty)$
XXX [2] $[0,1]$
[3] $[0, +\infty)$

2) Si consideri una rete non diretta, non pesata, con coefficiente di clustering (globale) C. Vale la seguente implicazione:

[1] Se $C = 0$ la rete è ad albero.
[2] La rete è ad albero se e solo se $C = 0$.
XXX [3] Se la rete è ad albero allora $C = 0$.

3) Per generare una rete sintetica con distribuzione di grado power-law e coefficiente di clustering elevato, è possibile utilizzare

[1] il modello DMS (Dorogovtsev-Mendes-Samukhin)
XXX [2] il modello HK (Holme-Kim)
[3] il modello WS (Watts-Strogatz)

4) Si consideri un insieme di N sistemi "integratori" identici $\dot{x} = u$, tra loro connessi in rete in modo lineare (diffusivo). Quando gli N integratori hanno raggiunto il consenso

XXX [1] $u = 0$ per ogni integratore
[2] $u \neq 0$ per ogni integratore
[3] $u \neq 0$ per almeno un integratore

5) Si consideri un insieme di N oscillatori identici $\dot{x} = f(x) + u$, tra loro connessi in rete in modo lineare (diffusivo). Quando gli N oscillatori sono sincronizzati

XXX [1] $u = 0$ per ogni oscillatore
[2] $u \neq 0$ per ogni oscillatore
[3] $u \neq 0$ per almeno un oscillatore