POLITECNICO MILANO 1863

COMPLESSITA' NEI SISTEMI E NELLE RETI

Prof. C. Piccardi

Appello del 3/9/2024

COGNOME:________________________ NOME: ______________________

Codice Persona: ____________________ Corso di laurea (INF, MTM, ...): _____

Firma dello studente: ___________________________ Visto del docente:_____

5	5	5	5	5	5

Voto totale
30

AVVERTENZE

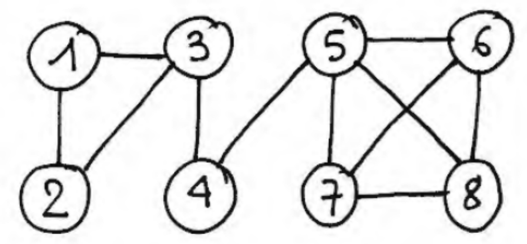
<u>- Non è consentito consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone/watch, ecc.).</u>

- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Lo studente è tenuto a prendere visione delle **modalità d'esame dettagliate** alla pagina web del corso (http://piccardi.faculty.polimi.it/csr.html).

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 1 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Calcolare la modularità associata alla partizione {1,2,3} , {4} , {5,6,7,8}.
b) Calcolare la probabilità di persistenza di ciascuna delle tre sottoreti definite al punto a).
c) Determinare qual è il nodo avente la più alta random walk centrality e calcolarne il valore.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

$$A = \left|\begin{array}{ccc|c|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right| \qquad \frac{[k_i k_j]}{2L} = \frac{1}{22}\left|\begin{array}{ccc|c|cccc} 4 & 4 & 6 & & & & & \\ 4 & 4 & 6 & & & & & \\ 6 & 6 & 9 & & & & & \\ \hline & & & 4 & & & & \\ \hline & & & & 16 & 12 & 12 & 12 \\ & & & & 12 & 9 & 9 & 9 \\ & & & & 12 & 9 & 9 & 9 \\ & & & & 12 & 9 & 9 & 9 \end{array}\right|$$

$$[k_i] = \left| 2 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 4 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \right|$$

a) $$Q = \frac{1}{2L} \sum_{C_1, C_2, C_3} \sum_{i,j \in C_h} \left(a_{ij} - \frac{k_i k_j}{2L} \right) = \frac{1}{22} \left\{ \left(6 - \frac{49}{22}\right) + \left(0 - \frac{4}{22}\right) + \left(12 - \frac{169}{22}\right) \right\} = 0.\cancel{3676}\ 3595$$

b) $$\alpha_c = \frac{\sum_{i \in C} k_i^{INT}}{\sum_{i \in C} k_i} : \quad \alpha_1 = \frac{2+2+2}{2+2+3} = \frac{6}{7} = 0.8571$$

$$\alpha_2 = \frac{0}{2} = 0$$

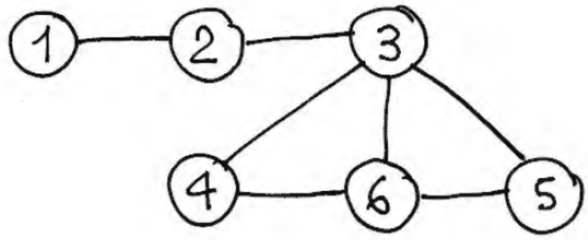
$$\alpha_3 = \frac{3+3+3+3}{4+3+3+3} = \frac{12}{13} = 0.9231$$

c) In una rete non diretta, non pesata, la random walk centrality è proporzionale al grado k_i, per cui il valore più alto è posseduto dal nodo 5 : $\pi_5 = \dfrac{k_5}{\sum_i k_i} = \dfrac{4}{22} = 0.1818$

<u>Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.</u>

Problema 2 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Calcolare distanza media, diametro ed efficienza della rete.
b) Calcolare il coefficiente di clustering di ogni nodo e quello globale.
c) Calcolare la betweenness centrality di ciascun nodo.
d) Calcolare la closeness centrality di ciascun nodo.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) $[d_{ij}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ & & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 0 & 2 & 1 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{vmatrix}$

$$\langle d \rangle = \frac{1}{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{j>i} d_{ij} = \frac{1}{15} \cdot 26 = 1.73$$

$$D = \max d_{ij} = 3$$

$$E = \frac{1}{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{j>i} \frac{1}{d_{ij}} = \frac{1}{15}\left(7 \cdot \frac{1}{1} + 5\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3}\right) = 0.7$$

c) $[b_i] = \begin{vmatrix} 0 \\ 1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 4 \\ 6.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{vmatrix}$

$$b_i = \sum_{j,k} \frac{n_{jk}(i)}{n_{jk}}$$

d) $\gamma_i = \dfrac{N-1}{\sum_j d_{ij}}$ $\quad [\gamma_i] = 5 / \begin{vmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \\ 9 \\ 9 \\ 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.42 \\ 0.625 \\ 0.833 \\ 0.555 \\ 0.555 \\ 0.625 \end{vmatrix}$

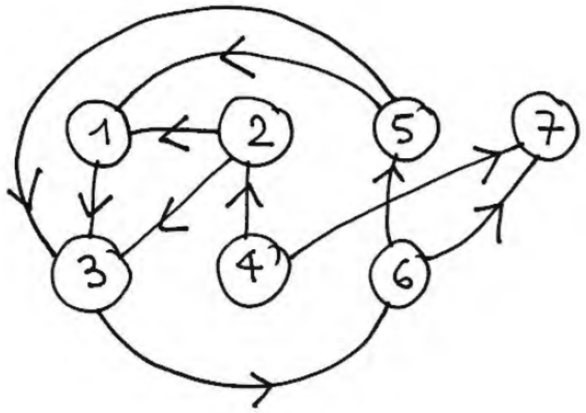
b) $c_i = \begin{cases} \dfrac{e_i}{\frac{k_i(k_i-1)}{2}}, & \text{se } k_i > 1 \\ 0, & \text{se } k_i \leq 1 \end{cases}$ $\quad k_i = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ $\quad C_i = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{0}{1} \\ \frac{2}{6} \\ \frac{1}{1} \\ \frac{1}{1} \\ \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{vmatrix}$

$$C = \frac{1}{N} \sum_i c_i = 0.5$$

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 3 (5 punti)

Si consideri la rete diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Determinare e rappresentare graficamente le distribuzioni di grado in- e out-.
b) Determinare (se esistono) le componenti IN, SCC, OUT.

Trascurare ora le direzioni degli archi, ottenendo così una rete non diretta:

c) Scrivere la matrice Laplaciana della rete.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $[k_i^{in}] = [2 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 2]$

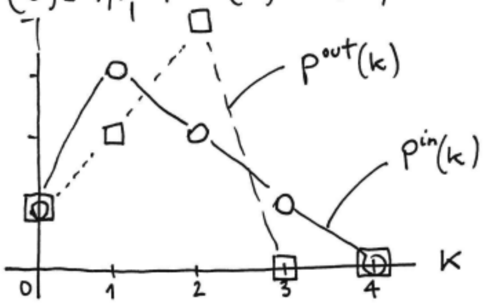
$[k_i^{out}] = [1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 0]$

$p^{in}(k) = \dfrac{\text{n. nodi con } k^{in} = k}{N}$, $p^{out}(k) = \dfrac{\text{n. nodi con } k^{out} = k}{N}$

$p^{in}(0) = 1/7$, $p^{in}(1) = 3/7$, $p^{in}(2) = 2/7$, $p^{in}(3) = 1/7$,

$p^{in}(k) = 0 \quad \forall k > 3$

$p^{out}(0) = 1/7$, $p^{out}(1) = 2/7$, $p^{out}(2) = 4/7$, $p^{out}(k) = 0 \; \forall k > 2$



b) SCC = {1, 3, 5, 6}, IN = {2, 4}, OUT = {7}
(il link 4 → 7 è un "tube")

c) $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad [k_i] = \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{vmatrix}$

$$L = \mathrm{diag}(k_i) - A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 4 (5 punti)

Rete Barabasi-Albert: algoritmo di generazione e proprietà per $N \to \infty$.

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 5 (5 punti)

Reti bipartite: definizione, descrizione, proiezioni.

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)

1) In una rete diretta, non pesata, il Pagerank dei nodi

[1] è proporzionale al grado entrante
[2] è tipicamente correlato al grado entrante
[3] è ben definito solo se la rete è fortemente connessa

2) In una rete non diretta, non pesata, la sottorete S ha probabilità di persistenza α_S. Se ora allarghiamo S includendo uno dei nodi adiacenti, la probabilità di persistenza della sotterete allargata

[1] sarà sempre maggiore o uguale a quella della sottorete originale
[2] sarà sempre minore o uguale a quella della sottorete originale
[3] potrà essere maggiore, minore o uguale a quella originale a seconda dei casi

3) L'indice di similarità di Katz tra due nodi i, j

[1] considera tutti i percorsi tra i e j di qualunque lunghezza
[2] considera tutti i percorsi tra i e j di lunghezza fino a 3
[3] considera tutti i percorsi tra i e j di lunghezza fino a 2

4) Una rete non diretta, non pesata, connessa, ha distanza media D. Se alla rete vengono aggiunti due link

[1] la distanza media diminuisce
[2] la distanza media può diminuire o rimanere costante
[3] la distanza media può diminuire, rimanere costante, o aumentare

5) Si consideri una successione di reti con numero di nodi N crescente, in cui tutti i nodi di tutte le reti hanno lo stesso grado k. La soglia epidemica del modello SIS

[1] cresce al crescere di N
[2] decresce al crescere di N
[3] è indipendente da N