POLITECNICO
MILANO 1863

COMPLESSITA' NEI SISTEMI E NELLE RETI

Prof. C. Piccardi
Appello del 22/7/2024

COGNOME:________________________ NOME: _______________________

Codice Persona: _____________________ Corso di laurea (INF, MTM, ...): _____

Firma dello studente: ___________________________ Visto del docente:_____

							Voto totale
5	5	5	5	5	5		30

AVVERTENZE

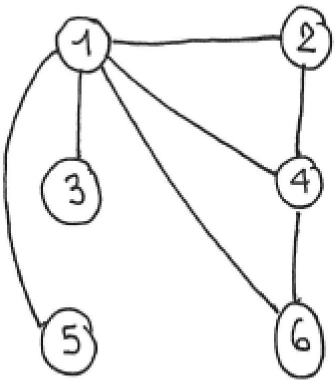
- Non è consentito consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone/watch, ecc.).

- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Lo studente è tenuto a prendere visione delle **modalità d'esame dettagliate** alla pagina web del corso (http://piccardi.faculty.polimi.it/csr.html).

<u>Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.</u>

Problema 1 (5 punti)

Si consideri la rete in figura.



Per ciascuno dei tre criteri sottoelencati, determinare la similarità $[s_{ij}]$ tra ciascuna coppia di nodi e, in base a essa, stabilire qual è il link più verosimile tra quelli non esistenti.

a) common neighbour
b) resource allocation
c) preferential attachment

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad [k_i] = \begin{vmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

a) $s_{ij} = |B_i \cap B_j|$, B_i = insieme vicini di i

$$[s_{ij}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ & & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 0 & 1 & 1 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

Tra i link non esistenti (cerchiati), il più verosimile è $(2,6)$

b) $S_{ij} = \sum_{h \in (B_i \cap B_j)} \frac{1}{K_h}$

$$[S_{ij}] = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 8/15 \\ & & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ & & & 0 & 1/5 & 1/5 \\ & & & & 0 & 1/5 \\ & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

Il più verosimile è $(2,6)$.

c) $S_{ij} = K_i K_j$

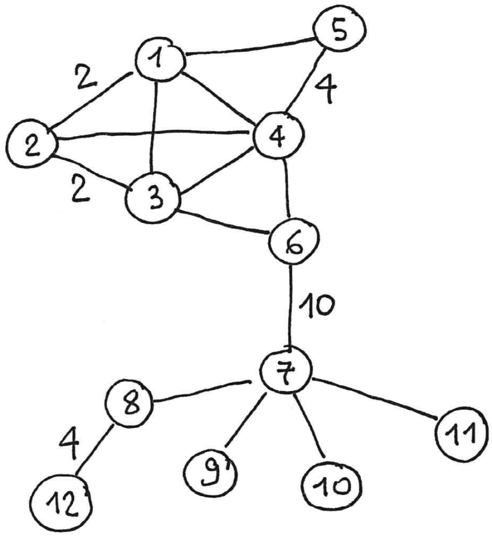
$$[S_{ij}] = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 5 & 15 & 5 & 10 \\ & 0 & 2 & 6 & 2 & 4 \\ & & 0 & 3 & 1 & 2 \\ & & & 0 & 3 & 6 \\ & & & & 0 & 2 \\ & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

Il più verosimile è $(2,6)$.

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 2 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, pesata, rappresentata in figura, dove i pesi valgono 1 per tutti i link in cui non è diversamente specificato.



a) Verificare se la partizione in due sottoreti {1,2,3,4,5,6}, {7,8,9,10,11,12} è una α-partizione, con $\alpha = 0.65$.

Trascurando ora i pesi (vale a dire ponendoli tutti uguali a 1):

b) Calcolare il momento primo e il momento secondo della distribuzione di grado.
c) Determinare la decomposizione k-shell.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) prob. di persistenza della sottorete S : $\alpha_S = \dfrac{\sum_{i\in S} s_i^{int}}{\sum_{i\in S} s_i}$

$S' = \{1, 2, \ldots, 6\}$: $\alpha' = \dfrac{5+5+5+8+5+2}{5+5+5+8+5+12} = 0.75$

$S'' = \{7, 8, \ldots, 12\}$: $\alpha'' = \dfrac{4+5+1+1+1+4}{14+5+1+1+1+4} = 0.6154$

Poiché $\alpha'' < 0.65$, S'' non è una α-community e $\{S', S''\}$ non è una α-partition.

b) $[k_i] = | 4 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 5 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \; |$

$\langle k \rangle = \dfrac{\sum k_i}{N} = \dfrac{32}{12} = 2.67$

distr. di grado:

$P(1) = \dfrac{4}{12}$, $P(2) = \dfrac{2}{12}$, $P(3) = \dfrac{2}{12}$, $P(4) = \dfrac{2}{12}$, $P(5) = \dfrac{2}{12}$

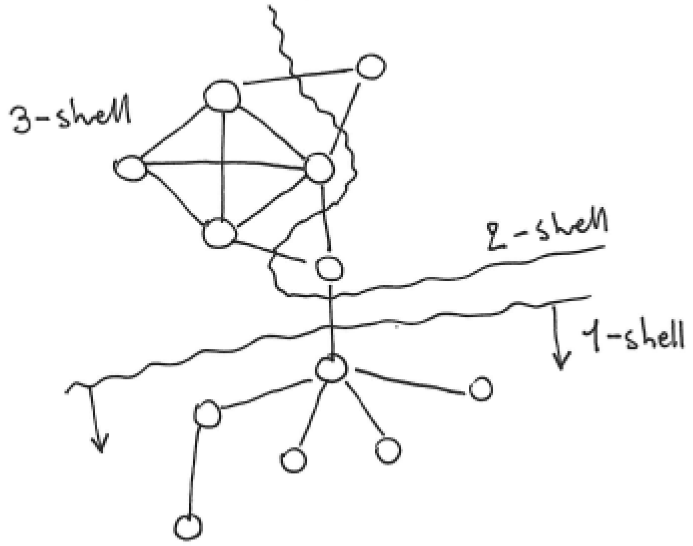
$P(k) = 0 \;\; \forall k > 5$

$\langle k^2 \rangle = \sum_k k^2 P(k) = 9.33$

c) 1-shell : $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

2-shell : $\{5, 6\}$

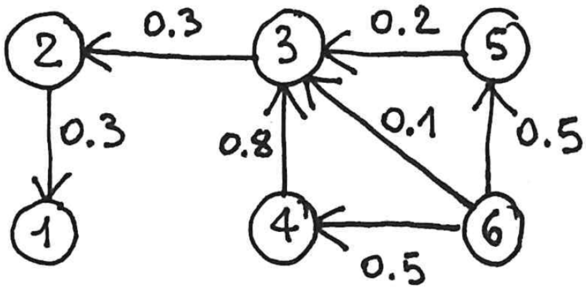
3-shell : $\{1, 2, 3, 4\}$



<u>Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.</u>

Problema 3 (5 punti)

Si consideri la rete diretta, pesata, rappresentata in figura.



<u>Trascurare dapprima direzioni e pesi</u> (rete non diretta, non pesata).

a) Calcolare la distanza media, il diametro e l'efficienza della rete.
b) Calcolare la betweenness centrality di ogni nodo.
c) Calcolare la random walk centrality di ogni nodo.

<u>Considerare ora le direzioni degli archi e le etichette numeriche associate.</u>

d) Supponendo che il nodo 6 sia l'unico nodo attivo in $t = 0$, svolgere due iterazioni (due istanti di tempo) del modello Independent Cascade, utilizzando le etichette numeriche degli archi come probabilità di attivazione p_{ij}.
A questo scopo, è disponibile un generatore di numeri casuali uniformemente distribuiti nell'intervallo [0,1], i cui primi numeri estratti sono, nell'ordine, i seguenti:

0.4854 0.1419 0.8003 0.4218 0.8147 0.9058 0.1270 0.9134 0.6324 …

(nota bene: specificare con precisione la procedura utilizzata)

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) $[d_{ij}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ & & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 0 & 2 & 1 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{vmatrix}$

$$\langle d \rangle = \frac{1}{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{j>i} d_{ij} = \frac{1}{15} \cdot 26 = 1.73$$

$$D = \max d_{ij} = 3$$

$$E = \frac{1}{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{j>i} \frac{1}{d_{ij}} = 0.7$$

b) $[b_i] = \begin{vmatrix} 0 \\ 1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 4 \\ 6.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{vmatrix}$ $\quad b_i = \sum_{j,k} \frac{n_{jk}(i)}{n_{jk}}$

c) $[k_i] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ $\quad k_{TOT} = \sum_i k_i = 14$

$\pi_i = \frac{k_i}{k_{TOT}}$ $\quad |\pi_i| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} / 14$

d) $t=0$: il nodo 6 può attivare 3, 4, 5 con le rispettive p_{ij}. Utilizziamo il generatore di numeri casuali:

3	0.4854	>	$p_{ij} = 0.1$	NON attivato
4	0.1419	<	0.5	ATTIVATO
5	0.8003	>	0.5	NON attivato

$t=1$: il nodo 4 può attivare 3:

3	0.4218	<	0.8	ATTIVATO

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 4 (5 punti)

Connessione e componenti in reti non dirette e dirette.

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 5 (5 punti)

Modularità: definizione, interpretazione, utilizzo.

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)

1) La sottorete S costituisce una componente di una rete diretta. Preso un nodo $i \notin S$

[1] non esiste alcun percorso da S a i né da i a S
[2] esiste sicuramente un percorso da S a i
[3] può esistere un percorso da i a S

2) In una rete non diretta, pesata, il nodo i è tra quelli con la più bassa centralità random walk. Ne consegue che il nodo i

[1] è tra quelli con la più bassa betweenness
[2] è tra quelli con il più basso grado
[3] è tra quelli con la più bassa strength

3) Applicando la k-core decomposition a una rete non diretta, non pesata, si è rilevato un core di valore massimo $k = 5$.

[1] Ogni nodo del 5-core ha grado non inferiore a 5.
[2] Ogni nodo del 5-core ha grado uguale a 5.
[3] Ogni nodo della rete ha grado non superiore a 5.

4) In una rete diretta, non pesata, fortemente connessa, il consenso

[1] non si ottiene per qualunque topologia della rete
[2] si ottiene per qualunque rete, ma il valore di consenso dipende dalla rete
[3] si ottiene per qualunque rete, ma il valore di consenso dipende dalla condizione iniziale

5) Nel modello di Kuramoto, quando si raggiunge la sincronizzazione di tutti i rotori:

[1] i rotori hanno tutti la stessa fase
[2] tutte le coppie di rotori hanno la stessa differenza di fase
[3] tutte le coppie di rotori hanno differenza di fase costante nel tempo