POLITECNICO MILANO 1863

COMPLESSITA' NEI SISTEMI E NELLE RETI

Prof. C. Piccardi
Appello del 29/1/2024

COGNOME:________________________ NOME: _______________________

Codice Persona: _____________________ Corso di laurea (INF, MTM, ...): ______

Firma dello studente: ___________________________ Visto del docente:______

							Voto totale
5	5	5	5	5	5		30

AVVERTENZE

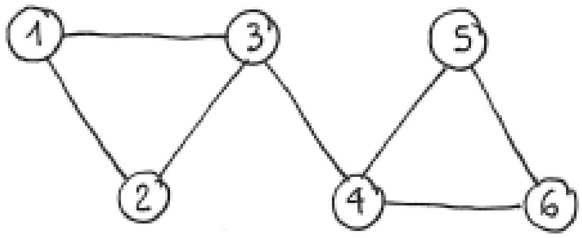
- Non è consentito consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone, ecc.).

- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Lo studente è tenuto a prendere visione delle **modalità d'esame dettagliate** alla pagina web del corso (http://piccardi.faculty.polimi.it/csr.html).

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 1 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



Si considerino le possibili partizioni della rete *in 2 sottoreti*.

a) Proporre, motivando la scelta, una partizione che abbia presumibilmente la più alta modularità, calcolando poi il valore di Q.
b) Proporre, motivando la scelta, una partizione che abbia presumibilmente la più bassa modularità, calcolando poi il valore di Q.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) Massimizzo il n. di link intra-comunità e minimizzo il n. di link inter-comunità: $\mathcal{P} = \{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}$

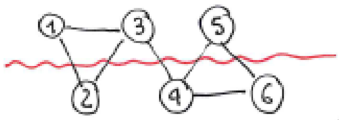
$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ & & & 0 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad [k_i k_j] = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 6 & & & \\ 4 & 4 & 6 & & & \\ 6 & 6 & 9 & & & \\ & & & 9 & 6 & 6 \\ & & & 6 & 4 & 4 \\ & & & 6 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$k_i = [2\ 2\ 3\ 3\ 2\ 2]$, $L = 7$

$$Q = \frac{1}{2L} \sum_{C_1, C_2} \sum_{i,j \in C_c} \left(a_{ij} - \frac{k_i k_j}{2L} \right) =$$

$$= \frac{1}{14} \left[\left(6 - \frac{49}{14} \right) + \left(6 - \frac{49}{14} \right) \right] = 0.3571$$

b) All'opposto, minimizzo il n. di link intra-comunità e massimizzo il n. di link inter-comunità: $\mathcal{P} = \{\{1,3,5\},\{2,4,6\}\}$



matrici con i soli termini intra-comunitari

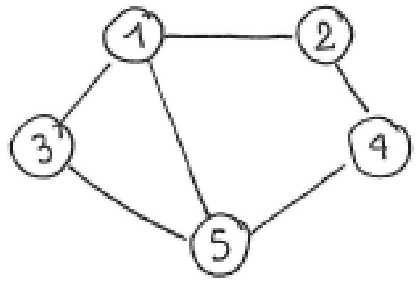
$$A = \begin{vmatrix} 0 & & 1 & & 0 & \\ & 0 & & 0 & & 0 \\ 1 & & 0 & & 0 & \\ & 0 & & 0 & & 1 \\ 0 & & 0 & & 0 & \\ & 0 & & 1 & & 0 \end{vmatrix} \qquad [k_i k_j] = \begin{vmatrix} 4 & & 6 & & 4 & \\ & 4 & & 6 & & 4 \\ 6 & & 9 & & 6 & \\ & 6 & & 9 & & 6 \\ 4 & & 6 & & 4 & \\ & 4 & & 6 & & 4 \end{vmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{2L} \left[4 - \frac{98}{2L} \right] = -0.2143$$

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 2 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Calcolare distanza media e diametro della rete.
b) Calcolare la betweenness centrality di ciascun nodo.
c) Simulare una cascata di guasti (modello Motter-Lai), assegnando una tolleranza $\alpha = 0.5$ a ciascun nodo e ipotizzando un guasto iniziale nel nodo 1. Al termine della cascata, determinare i nodi guasti e la dimensione relativa della più grande componente connessa.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

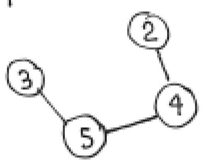
a) $[d_{ij}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ & 0 & 2 & 1 & 2 \\ & & 0 & 2 & 1 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{vmatrix}$ $\quad D = \max_{i,j} d_{ij} = 2$

$$\langle d \rangle = \frac{1}{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{j>i} d_{ij} = \frac{1}{10} \cdot 14 = 1.4$$

b) $$[b_i] = \sum_{j,k} \frac{n_{jk}(i)}{n_{jk}} = \begin{vmatrix} 0+1+\frac{1}{2} \\ 0+\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0+\frac{1}{2} \\ 0+\frac{1}{2}+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \\ 1.5 \end{vmatrix}$$

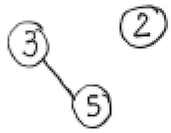
c) $$[C_i] = (1+\alpha)[b_i] = \begin{vmatrix} \cancel{1.65} \\ \cancel{0.55} \\ \cancel{0} \\ \cancel{0.55} \\ \cancel{1.65} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2.25 \\ 0.75 \\ 0 \\ 0.75 \\ 2.25 \end{vmatrix}$$

step 1: rimuovo il nodo 1, ricalcolo le betweenness:



$$[b_i]_{t=1} = \begin{array}{c|l} \text{nodo:} & \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} & \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0+1+1 \\ 0+1+1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Poiché $b_4|_{t=1} > C_4$, il nodo 4 si guasta step 2: rimuovo il nodo 4, le betweenness sono tutte nulle, nessuna eccede C_i, la cascata si arresta.

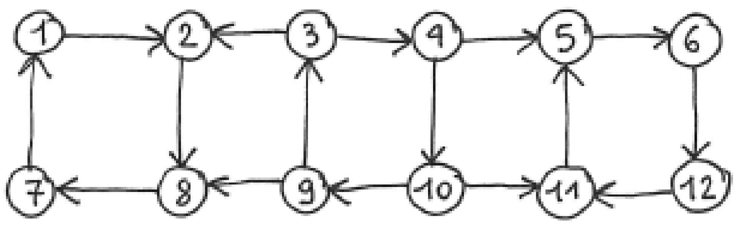


Nodi guasti $= \{1, 4\}$, $G = \frac{S}{N} = \frac{2}{5} = 0.4$ è la dim. relativa della più grande comp. connessa.

<u>Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.</u>

Problema 3 (5 punti)

Si consideri la rete diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Discutere la connessione in senso forte e in senso debole della rete, determinando, in entrambi i casi, le componenti connesse.
b) Per la rete diretta, determinare la random walk centrality dei nodi 3 e 10.
c) Ignorando ora la direzione degli archi, scrivere la matrice Laplaciana della rete non diretta così ottenuta.
d) Sempre per la rete non diretta definita al punto precedente, determinare la random walk centrality dei nodi 3 e 10.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) In senso debole, cioè ignorando la direzione degli archi: $\exists$ percorso $i \to j \ \forall i,j \Rightarrow$ la rete è connessa.
In senso forte (rete diretta): $\exists$ 3 componenti SCC:
$\{1,2,7,8\}$, $\{3,4,10,9\}$, $\{5,6,12,11\}$

b) La SCC $\{3,4,9,10\}$ verrà asintoticamente abbandonata dal random walker, visto che $\exists$ link uscenti, e non verrà mai più visitata, visto che $\nexists$ link entranti. Per cui $\pi_3 = \pi_{10} = 0$.

c) $[k_i] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$$L = \begin{vmatrix}
2 & -1 & & & & & -1 & & & & & \\
-1 & 3 & -1 & & & & & -1 & & & & \\
 & -1 & 3 & -1 & & & & & -1 & & & \\
 & & -1 & 3 & -1 & & & & & -1 & & \\
 & & & -1 & 3 & -1 & & & & & -1 & \\
 & & & & & 2 & & & & & & -1 \\
-1 & & & & & & 2 & -1 & & & & \\
 & -1 & & & & & -1 & 3 & -1 & & & \\
 & & -1 & & & & & -1 & 3 & -1 & & \\
 & & & -1 & & & & & -1 & 3 & -1 & \\
 & & & & -1 & & & & & -1 & 3 & -1 \\
 & & & & & -1 & & & & & -1 & 2
\end{vmatrix} \qquad L = \mathrm{diag}(k_i) - A$$

d) $\pi_i = \dfrac{k_i}{\sum_j k_j}$ $\qquad \pi_3 = \pi_{10} = \dfrac{3}{32}$

<u>Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..</u>

Domanda 4 (5 punti)

Distanza media ed efficienza in reti non pesate e pesate.

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 5 (5 punti)

Immunizzazione (strategie di vaccinazione) in reti omogenee ed eterogenee: definizioni e risultati.

<u>Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)</u>

1) In ogni rete diretta

[1] il grado medio entrante e uscente coincidono ($\langle k^{in} \rangle = \langle k^{out} \rangle$)

[2] le distribuzioni di grado entrante e uscente coincidono ($P^{in}(k) = P^{out}(k)\ \forall k$)

[3] le distribuzioni di grado entrante e uscente sono complementari ($P^{in}(k) = 1 - P^{out}(k)\ \forall k$)

2) Una rete Erdos-Renyi con $N = 20$, creata con il modello $G(N, p)$

[1] ha densità pari a p

[2] ha densità attesa pari a p

[3] ha densità pari a $2p/(N(N-1))$

3) La modularità Q associata alla partizione di una rete prende valori nell'intervallo

[1] $[0\,,1]$

[2] $[0\,,2L]$, dove L è il numero di link della rete

[3] $[-1\,,1]$

4) Quando due sistemi periodici sono sincronizzati in fase

[1] le loro fasi hanno somma costante nel tempo

[2] le loro fasi sono costanti nel tempo

[3] le loro fasi hanno differenza costante nel tempo

5) Nella sessione di laboratorio dedicata a Gephi, si è analizzata la rete che descrive

[1] le transazioni finanziarie tra abitanti dei comuni italiani

[2] la diffusione del Covid nel marzo 2020 tra i comuni italiani

[3] la mobilità degli individui tra i comuni italiani