POLITECNICO
MILANO 1863

# COMPLESSITA' NEI SISTEMI E NELLE RETI

Prof. C. Piccardi
Appello del 4/9/2023

COGNOME:________________________ NOME: _______________________

Codice Persona: _____________________ Corso di laurea (INF, MTM, ...): ______

Firma dello studente: ___________________________ Visto del docente:______

| | | | | | | | Voto totale |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | | 30 |
| | | | | | | | |

**AVVERTENZE**

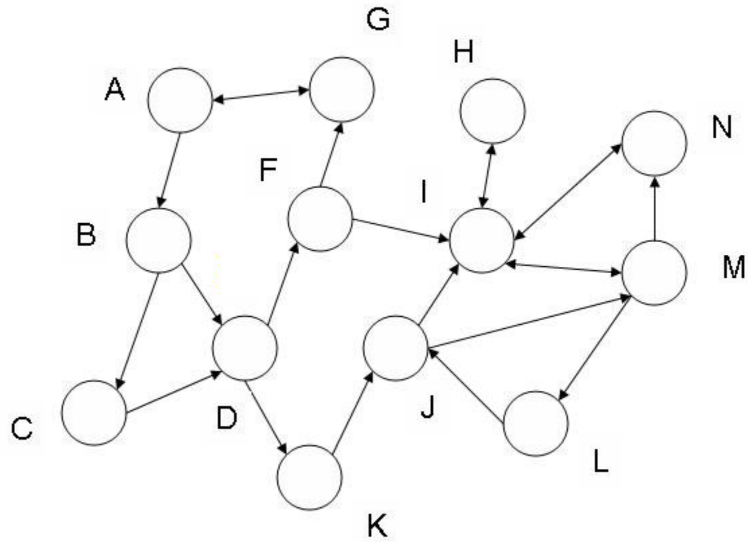
***- Non è consentito consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone, ecc.).***

- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Lo studente è tenuto a prendere visione delle **modalità d'esame dettagliate** alla pagina web del corso (http://piccardi.faculty.polimi.it/csr.html).

***Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.***

## Problema 1 (5 punti)

Si consideri la rete diretta rappresentata in figura.




a) Determinare le componenti fortemente connesse (SCC), qualora esistano.
b) Determinare la matrice delle probabilità di transizione di un random walker.
c) Su base puramente intuitiva (cioè senza fare calcoli), determinare la random walk centrality (probabilità di stato a regime) del nodo A.

---

**Soluzione** [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

① a) Una SCC è una sottorete (massimale) in cui esiste un percorso da ogni nodo a ogni altro nodo.
Nelle rete in figura ve ne sono due:

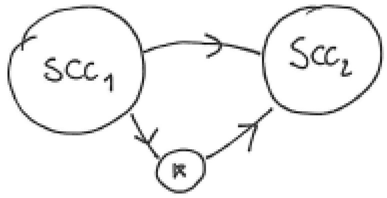
$S_{cc1} = \{A, B, C, D, F, G\}$ , $\{H, I, J, L, M, N\} = S_{cc2}$

b) $p_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{k_i^{out}}$

$$
P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \\ G \\ H \\ I \\ J \\ K \\ L \\ M \\ N \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccc} A & B & C & D & F & G & H & I & J & K & L & M & N \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 1/2 & & & & 1/2 & & & & & & & \\
 & & 1/2 & 1/2 & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1/2 & & & & & 1/2 & & & \\
 & & & & & 1/2 & & 1/2 & & & & & \\
1 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & 1/3 & & & & & 1/3 & 1/3 \\
 & & & & & & & 1/2 & & & & 1/2 & \\
 & & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & 1/3 & & & 1/3 & 1/3 & \\
 & & & & & & & 1 & & & & &
\end{array}\right]
\end{array}
$$

($p_{ij} = 0$ ovunque non specificato)

c) La struttura della rete è globalmente la seguente:

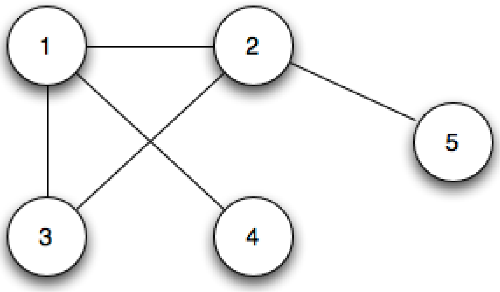



Per $t \to \infty$ il random walker sarà in SCC$_2$ con probabilità 1, per cui $\pi_A = 0$.

***<u>Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.</u>***

## Problema 2 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.




a) Calcolare distanza media, diametro ed efficienza della rete.
b) Calcolare la betweenness centrality di ciascun nodo.
c) Calcolare la closeness centrality di ciascun nodo.
d) Calcolare il coefficiente di clustering di ogni nodo e quello globale.

---

**Soluzione** [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

2 a) $[d_{ij}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ & 0 & 1 & 2 & 1 \\ & & 0 & 2 & 2 \\ & & & 0 & 3 \\ & & & & 0 \end{vmatrix}$ $\langle d \rangle = \dfrac{1}{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{j>i} d_{ij} = \dfrac{16}{10} = 1.6$

$D = \max d_{ij} = 3$

$$E = \frac{1}{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{j>i} \frac{1}{d_{ij}} = \frac{1}{10}\left(5 \cdot \frac{1}{1} + 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 0.733$$

b) $[b_i] = \begin{vmatrix} 0+1+1+1 \\ 0+1+1+1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\qquad b_i = \sum_{j,k} \dfrac{n_{jk}(i)}{n_{jk}}$

c) $\gamma_i = \dfrac{N-1}{\sum_j d_{ij}}$ $\qquad [\gamma_i] = \left[ \dfrac{4}{5} \quad \dfrac{4}{5} \quad \dfrac{4}{6} \quad \dfrac{4}{8} \quad \dfrac{4}{8} \right]$

d) $c_i = \begin{cases} \dfrac{e_i}{\frac{k_i(k_i-1)}{2}}, & \text{se } k_i > 1 \\ 0, & \text{se } k_i \leq 1 \end{cases}$ $\qquad [k_i] = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

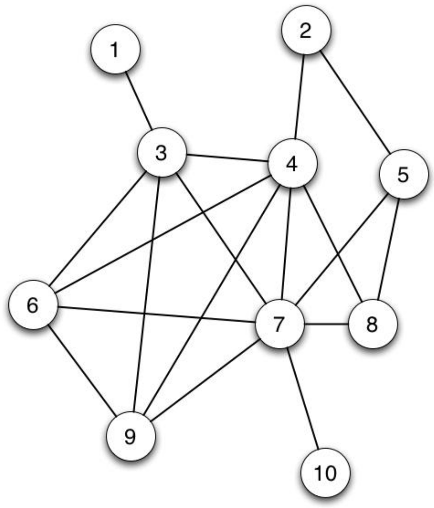
$$[c_i] = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{1} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$C = \langle c_i \rangle = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$$

***Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.***

## Problema 3 (5 punti)

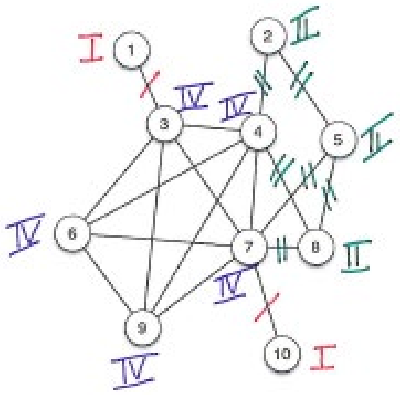
Si consideri la rete non diretta rappresentata in figura.




a) Determinare la decomposizione k-shell della rete.
b) Calcolare le probabilità di persistenza delle quattro sottoreti formate rispettivamente dai nodi {1}, {3,4,6,7,9}, {2,5,8}, {10}.
c) Calcolare la random walk centrality di ciascun nodo.
d) Calcolare il grado medio della rete e il grado medio dei vicini.

---

**Soluzione** [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:




I : {1, 10}
II : {2, 5, 8}
IV : {3, 4, 6, 7, 9}

③ a) vedi figura (k-shell in numero romano)

b) $\alpha_S = \dfrac{\sum_{i \in S} k_i^{INT}}{\sum_{i \in S} k_i}$

Per gli insiemi {1} e {10} si ha $\alpha_S = 0$, poiché si tratta di nodi singoli ($k_i^{INT} = 0$).

$\alpha_{\{3,4,6,7,9\}} = \dfrac{4+4+4+4+4}{5+6+4+7+4} = \dfrac{20}{26} \simeq 0.77$

$\alpha_{\{2,5,8\}} = \dfrac{1+2+1}{2+3+3} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} = 0.5$

c) In una rete non diretta, non pesata, connessa:

$$\pi_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \quad , \text{ per cui:}$$

$$[\pi_i] = |1 \;\; 2 \;\; 5 \;\; 6 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 7 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 1| \,/36$$

d) $$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_j k_j = \frac{36}{10} = 3.6$$

$$k_{nn} = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle}$$

distr. di grado: $P(1) = \frac{2}{10}$, $P(2) = \frac{1}{10}$, $P(3) = \frac{2}{10}$,
$P(4) = \frac{2}{10}$, $P(5) = \frac{1}{10}$, $P(6) = \frac{1}{10}$,
$P(7) = \frac{1}{10}$, $P(k) = 0 \;\forall$ altro $k$

$$\langle k^2 \rangle = \sum_k k^2 P(k) = 1 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.1 + 9 \cdot 0.2 + 16 \cdot 0.2 + 25 \cdot 0.1 + 36 \cdot 0.1 + 49 \cdot 0.1 = 16.6$$

$$k_{nn} = \frac{16.6}{3.6} = 4.61$$

***Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..***

## Domanda 4 (5 punti)

Definizione di rete connessa e di componenti (forti, deboli, in, out, …) in reti non dirette e dirette.

***Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..***

**Domanda 5 (5 punti)**

Definizione di guasto e di attacco a una rete; indicatori per quantificare l'effetto di guasti/attacchi.

---

***Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)***

1) In una rete non pesata, non diretta, la randow walk centrality del nodo $i$

[1] cresce proporzionalmente alla betweenness di $i$

[2] cresce proporzionalmente al grado di $i$

[3] cresce quadraticamente con il grado di $i$

2) In una rete Erdos-Renyi realizzata mediante il modello $G(N, p)$, per $p$ fissato, il grado medio della rete

[1] è indipendente da $N$

[2] cresce con $N$

[3] decresce con $N$

3) In una rete non diretta, non pesata, con matrice di adiacenza $A = [a_{ij}]$, il numero di vicini in comune ai nodi $i, j$ vale

[1] $a_{ij} + a_{ji}$

[2] $(a_{ij})^2$

[3] $(A^2)_{ij}$

4) In una rete non diretta, non pesata, che connette $N$ integratori, il consenso viene raggiunto da ogni stato iniziale

[1] qualunque sia la rete

[2] qualunque sia la rete, purché connessa

[3] qualunque sia la rete, purché completa

5) Nel modello di propagazione di guasti (cascade of failures, Motter and Lai, 2002), la capacità $C_i$ del nodo $i$

[1] ha lo stesso valore per tutti i nodi

[2] diminuisce al crescere del tempo $t$

[3] non varia nel tempo