



POLITECNICO MILANO 1863

COMPLESSITA' NEI SISTEMI E NELLE RETI

Prof. C. Piccardi

Appello del 3/7/2023

COGNOME: _____ NOME: _____

Codice Persona: _____ Corso di laurea (INF, MTM, ...): _____

Firma dello studente: _____ Visto del docente: _____

5	5	5	5	5	5
---	---	---	---	---	---

Voto totale

30

AVVERTENZE

- Non è consentito consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone, ecc.).

- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.

- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.

- Lo studente è tenuto a prendere visione delle **modalità d'esame dettagliate** alla pagina web del corso (<http://piccardi.faculty.polimi.it/csr.html>).

Riordinando i nodi:

$$[k_i] = \left| \begin{array}{ccccccc} 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 & 7 \end{array} \right|$$

$$Q = \frac{1}{14} \left[\left(0 - \frac{49}{14} \right) + \left(0 - \frac{49}{14} \right) \right] = -0.5$$

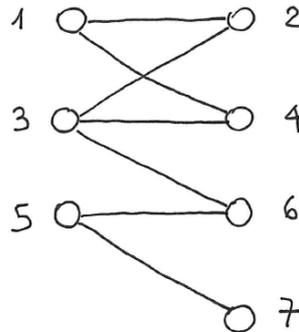
d) $\alpha_{C_1} = \alpha_{C_2} = 0$, poiché non esistono link interni.

$$[k_i k_j] = \left| \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 6 & 4 & & & \\ 6 & 9 & 6 & & & \\ 4 & 6 & 4 & & & \\ \hline & & & 4 & 4 & 4 & 2 \\ & & & 4 & 4 & 4 & 2 \\ & & & 4 & 4 & 4 & 2 \\ & & & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right|$$

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 2 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



- a) Determinare la distanza media e l'efficienza della rete.
- b) Determinare la information centrality del nodo 6.

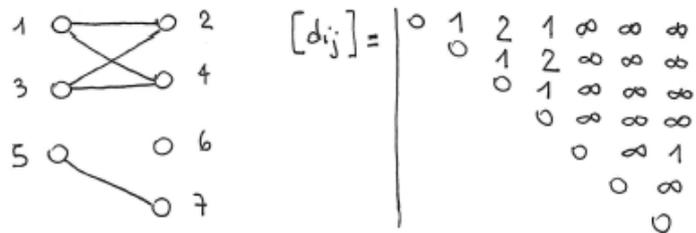
Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

$$2) \ a) \ [d_{ij}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & 0 & 1 & 2 & 3 \\ & & & & 0 & 1 & 4 \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$\langle d \rangle = \frac{1}{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{j>i} d_{ij} = \frac{1}{21} \cdot 48 = 2.29$$

$$E = \frac{1}{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{j>i} \frac{1}{d_{ij}} = \frac{1}{21} \left(7 \cdot \frac{1}{1} + 6 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{5} \right) = 0.5849$$

- b) Si rimuovono i link associati a 6 e si ricalcolano le distanze:



La nuova efficienza:

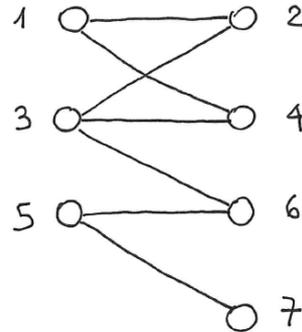
$$E_6 = \frac{1}{21} \left(5 \cdot \frac{1}{1} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 14 \cdot \frac{1}{\infty} \right) = 0.2857$$

$$\text{Per cui: } I_6 = \frac{E - E_6}{E} = \frac{0.5849 - 0.2857}{0.5849} = 0.5115$$

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 3 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



- a) Determinare la distribuzione di grado della rete e la distribuzione di grado dei vicini.
- b) Determinare quali sono i 2 link mancanti più verosimili secondo i criteri *preferential attachment* e *common neighbors*.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

③ a) $[k_i] = [2 \ 2 \ 3 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1]$, $N = 7$
 $P(k) = \frac{\text{n. nodi } | k_i=k}{N}$
 $P(1) = \frac{1}{7}$, $P(2) = \frac{5}{7}$, $P(3) = \frac{1}{7}$, $P(k) = 0 \ \forall k > 3$
 $Q(k) = \frac{k P(k)}{\langle k \rangle}$, $\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum k_i = \frac{14}{7} = 2$
 $Q(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{14}$, $Q(2) = \frac{2}{2} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{7}$,
 $Q(3) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{14}$, $Q(k) = 0 \ \forall k > 3$

b) $[k_i k_j] = \begin{vmatrix} - & 4 & 6 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ - & 6 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ - & 6 & 6 & 6 & 3 \\ - & 4 & 4 & 2 \\ - & 4 & 2 \\ - & 2 \\ - \end{vmatrix}$

Cerchiati i link NON presenti nella rete.

Link più verosimili: $(1,3), (3,5)$

$|B_i \cap B_j| = \begin{vmatrix} - & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ - & 0 & 1 & 0 & 0 \\ - & 0 & 1 & 0 \\ - & 0 & 0 \\ - & 1 \end{vmatrix}$

Link più verosimili: $(1,3), (2,4)$

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 4 (5 punti)

Reti assortative e disassortative: definizione e quantificazione

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 5 (5 punti)

Processo SIS su reti omogenee: definizione locale (automa cellulare probabilistico) e proprietà globali

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata = - 0.5, risposta non data = 0)

1) In una rete non pesata, non diretta, un nodo che appartiene alla 2-shell

- [1] ha grado inferiore di qualunque nodo nella 3-shell
- [2] è connesso con altri nodi del 2-core
- [3] ha grado pari a 2

2) Rimuovendo alcuni link da una rete

- [1] la dimensione della più grande componente connessa aumenta o resta invariata
- [2] la distanza media aumenta o resta invariata
- [3] l'efficienza aumenta o resta invariata

3) La matrice di transizione P che governa la dinamica di un random walker

- [1] è sempre simmetrica
- [2] è simmetrica per ogni rete non diretta
- [3] può essere non simmetrica anche se la rete è non diretta

4) In un oscillatore di Kuramoto, quando tutti i rotori sono tra loro sincronizzati

- [1] le fasi ϕ_i, ϕ_j coincidono per ogni coppia i, j
- [2] le fasi ϕ_i, ϕ_j coincidono per almeno qualche coppia i, j
- [3] le fasi ϕ_i, ϕ_j non necessariamente coincidono per qualche coppia i, j

5) Una rete Barabasi-Albert con N nodi, affetta da un processo SIS, è sottoposta a vaccinazione su nodi scelti a caso. Il numero di individui da vaccinare allo scopo di immunizzare la popolazione ($y \rightarrow 0$)

- [1] deve essere superiore a $N_c = N/\beta$
- [2] tende a 0 quando $N \rightarrow \infty$
- [3] tende a N quando $N \rightarrow \infty$