POLITECNICO
MILANO 1863

COMPLESSITA' NEI SISTEMI E NELLE RETI

Prof. C. Piccardi
Appello del 9/6/2023

COGNOME:________________________ NOME: _______________________

Codice Persona: _____________________ Corso di laurea (INF, MTM, ...): _____

Firma dello studente: ___________________________ Visto del docente:_____

5	5	5	5	5	5

Voto totale
30

AVVERTENZE

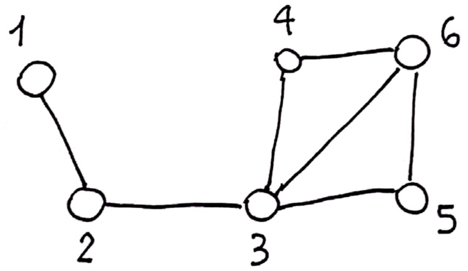
- Non è consentito consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone, ecc.).

- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Lo studente è tenuto a prendere visione delle **modalità d'esame dettagliate** alla pagina web del corso (http://piccardi.faculty.polimi.it/csr.html).

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 1 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Calcolare distanza media, diametro ed efficienza della rete.
b) Calcolare la betweenness centrality di ogni nodo.
c) Calcolare il coefficiente di clustering di ogni nodo e quello globale.
d) Si consideri un processo SIS con $\beta = 0.1$ (infection rate), $\gamma = 0.4$ (recovery rate) e $\Delta = 1$ (discretizzazione temporale). Supponendo che in $t = 0$ i nodi 1 e 2 siano infetti e tutti gli altri siano suscettibili, determinare lo stato di ogni nodo in $t = 1$. A questo scopo, è disponibile un generatore di numeri casuali uniformemente distribuiti nell'intervallo [0,1], i cui primi numeri estratti sono, nell'ordine, i seguenti:

0.4854 0.1419 0.8003 0.4218 0.8147 0.9058 0.1270 0.9134 0.6324 …

(nota bene: specificare con precisione la procedura utilizzata)

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $[d_{ij}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ & & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 0 & 2 & 1 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{vmatrix}$ $\quad < d > = \dfrac{1}{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{j>i} d_{ij} = \dfrac{1}{15} \cdot 26 = 1.73$

$D = \max d_{ij} = 3$

$E = \dfrac{1}{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{j>i} \dfrac{1}{d_{ij}} = 0.7$

b) $[b_i] = \begin{vmatrix} 0 \\ 1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 4 \\ 6.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{vmatrix}$ $\quad b_i = \sum_{j,k} \dfrac{n_{jk}(i)}{n_{jk}}$

c) $C_i = \begin{cases} \dfrac{e_i}{\frac{k_i(k_i-1)}{2}}, & \text{se } k_i > 1 \\ 0, & \text{se } k_i \leq 1 \end{cases}$ $\quad [k_i] = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ $\quad [C_i] = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1 \\ 1 \\ 2/3 \end{vmatrix}$

$C = < C_i > = \dfrac{1}{N} \sum_i C_i = 0.5$

d) Regole: nodo I diventa S con prob. $\gamma\Delta = 0.4$
nodo S diventa I con prob $\beta\Delta I_i = 0.1 I_i$

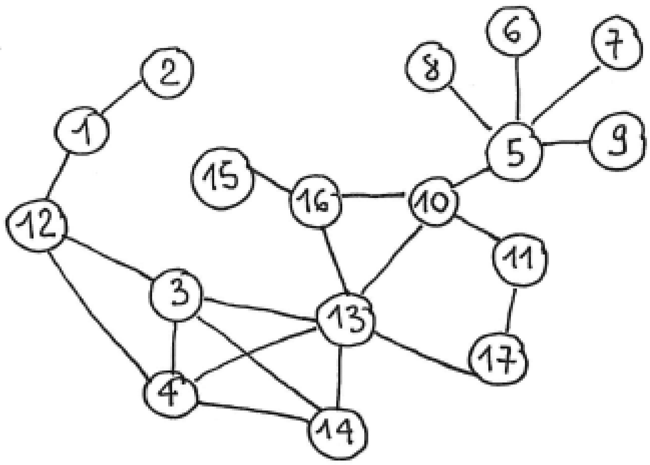
n. vicini infetti

nodo	t=0	t=1	
1	I	I	perché $0.4854 > \gamma\Delta$
2	I	S	" $0.1419 < \gamma\Delta$
3	S	S	" $0.8003 > \beta\Delta \cdot 1$
4	S	S	non hanno vicini I
5	S	S	
6	S	S	

<u>Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.</u>

Problema 2 (5 punti)

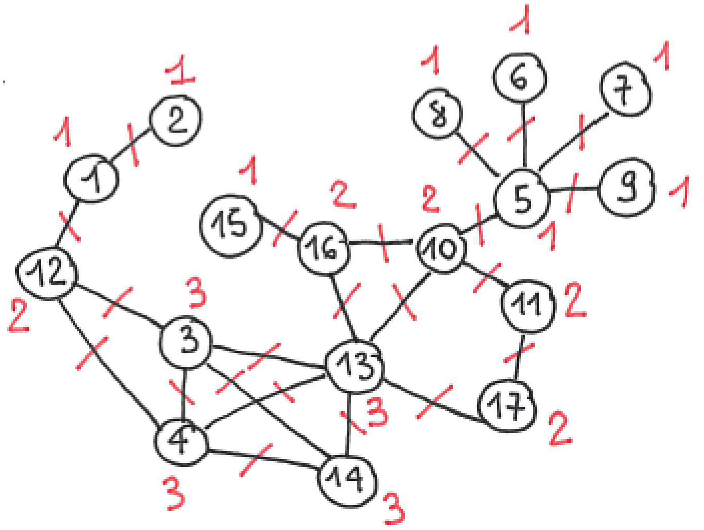
Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Determinare la centralità k-coreness di ciascun nodo.
b) Determinare la degree centrality di ciascun nodo.
c) Determinare la distribuzione di grado e calcolarne i momenti primo e secondo.
d) Determinare la distribuzione di grado cumulata.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a)



La k-coreness di un nodo è la sua k-shell di appartenenza.

b) $[k_i] = [2 \quad 1 \quad 4 \quad 4 \quad 5 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \quad 6 \quad 3 \quad 1 \quad 3 \quad 2]$

c) $P(1) = 6/17$, $P(2) = 3/17$, $P(3) = 3/17$, $P(4) = 3/17$,

$P(5) = 1/17$, $P(6) = 1/17$, $P(k) = 0 \quad \forall k > 6$

$P(k) = \frac{\text{n. nodi} : k_i = k}{N}$

$$\langle k \rangle = \sum_k k P(k) = \frac{6}{17} + 2\frac{3}{17} + 3\frac{3}{17} + 4\frac{3}{17} + 5\frac{1}{17} + 6\frac{1}{17}$$

$$= 2.59$$

$$\langle k^2 \rangle = \sum_k k^2 P(k) = \frac{6}{17} + 4\frac{3}{17} + 9\frac{3}{17} + 16\frac{3}{17} + 25\frac{1}{17} + 36\frac{1}{17}$$

$$= 9.06$$

d) $$\bar{P}(k) = \frac{\text{n. nodi} : k_i \geq k}{N} = \sum_k^{\infty} {}_h P(h)$$

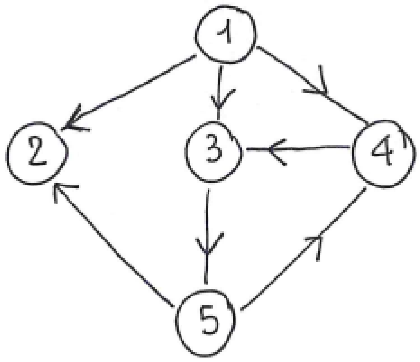
$\bar{P}(1) = \frac{17}{17} = 1$, $\bar{P}(2) = \frac{11}{17}$, $\bar{P}(3) = \frac{8}{17}$, $\bar{P}(4) = \frac{5}{17}$,

$\bar{P}(5) = \frac{2}{17}$, $\bar{P}(6) = \frac{1}{17}$, $\bar{P}(k) = 0 \quad \forall k > 6$

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 3 (5 punti)

Si consideri la rete diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Determinare, se esistono, le sottoreti SCC, IN e OUT.
b) Calcolare la densità della rete.
c) Scrivere la matrice di transizione di un random walker, aggiungendo eventualmente auto-anelli solo dove strettamente necessario.
d) TRASCURANDO LE DIREZIONI DEGLI ARCHI (rete non diretta), determinare la random walk centrality di ciascun nodo.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $SCC = \{3,4,5\}$, $IN = \{1\}$, $OUT = \{2\}$
(il link $1 \to 2$ è un "tube")

b) $$\rho = \frac{L}{N(N-1)} = \frac{7}{5 \cdot 4} = 0.35$$

c) $$p_{ij} = \frac{a_{ij}}{k_i^{out}} \qquad P = [p_{ij}] = \begin{vmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{vmatrix}$$

auto-anello

d) in una rete non diretta $\pi_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$, per cui

$$[\pi_i] = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} / 14$$

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 4 (5 punti)

Indicatori di similarità (topologica) tra nodi: definizione e interpretazione

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 5 (5 punti)

Eigenvector centrality e authority/hub centrality: definizione e interpretazione

<u>Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)</u>

In una rete diretta, non pesata, la densità ρ coincide con

(*) ~~[1]~~ la frazione di 1 nella matrice di adiacenza
[2] la frazione di 1 nella matrice di adiacenza, diviso per 2
~~[3]~~ la frazione di 1 nei termini non diagonali nella matrice di adiacenza

Data una rete diretta nella cui giant component esistono (non vuote) tutte e tre le sottoreti IN, SCC, OUT:

[1] esiste un percorso da ogni nodo OUT a ogni nodo IN
~~[2]~~ esiste un percorso da ogni nodo IN a ogni nodo OUT
[3] non necessariamente esiste un percorso da ogni nodo IN a ogni nodo OUT

Data la distribuzione di grado cumulata $\bar{P}(k)$ di una rete non diretta, non pesata:

~~[1]~~ $\bar{P}(k) = 1$ se nessun nodo ha grado minore di k
[2] $\bar{P}(k) = 0$ se nessun nodo ha grado k
[3] $\bar{P}(k) > \bar{P}(k+1)$ per ogni k

Scegliendo i parametri opportunamente, lo stochastic block model può essere utilizzato per generare

~~[1]~~ una rete Erdos-Renyi
[2] una rete Barabasi-Albert
[3] una rete Watts-Strogatz

In un processo SIS su rete omogenea con N fissato, la soglia epidemica β_c, a parità di tutto il resto:

[1] cresce al crescere della densità della rete
~~[2]~~ decresce al crescere della densità della rete
[3] non dipende dalla densità della rete

(*) La risposta [1] è corretta se si assume che la rete ammetta auto-anelli.