POLITECNICO
MILANO 1863

COMPLESSITA' NEI SISTEMI E NELLE RETI

Prof. C. Piccardi
Appello del 13/2/2023

COGNOME:________________________ NOME: ______________________

Codice Persona: ____________________ Corso di laurea (INF, MTM, ...): _____

Firma dello studente: __________________________ Visto del docente:_____

							Voto totale
5	5	5	5	5	5		30

AVVERTENZE

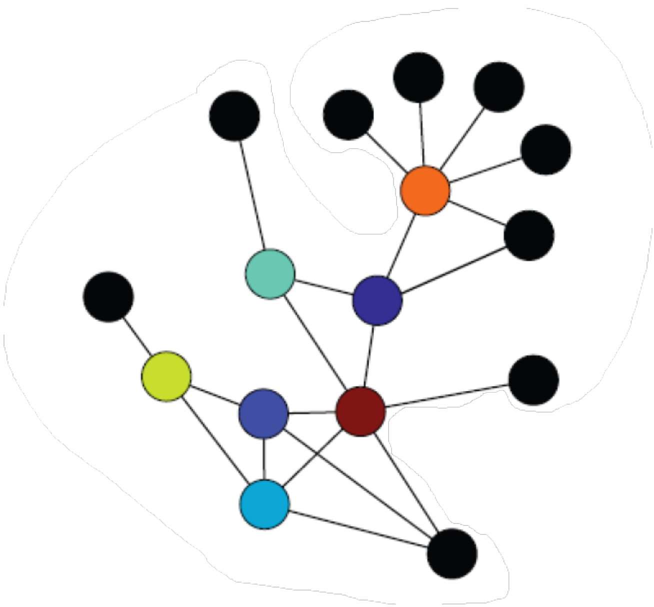
- Non è consentito consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone, ecc.).

- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Lo studente è tenuto a prendere visione delle **modalità d'esame dettagliate** alla pagina web del corso (http://piccardi.faculty.polimi.it/csr.html).

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 1 (5 punti)

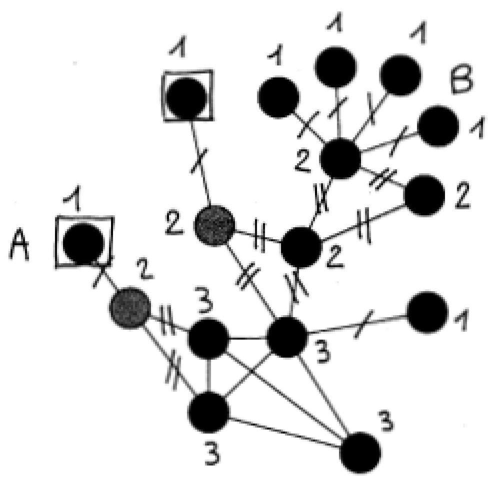
Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Determinare la decomposizione k-shell.
b) Determinare il diametro.
c) Determinare la distribuzione di grado e i suoi momenti primo e secondo.
d) Determinare la distribuzione di grado dei vicini e il suo valore medio.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a)



b) Per ispezione visiva, il più lungo shortest path ha lunghezza $D = \max_{i,j} d_{ij} = 6$, tra i due nodi indicati sopra con A e B.

c) Per ispezione visiva $(N = 16)$

$P(1) = \frac{7}{16}$, $P(2) = \frac{1}{16}$, $P(3) = \frac{3}{16}$, $P(4) = \frac{3}{16}$,

$P(5) = 0$, $P(6) = \frac{2}{16}$, $P(k) = 0 \ \forall k \geq 7$

$$P(k) = \frac{\text{n. nodi con } k_i = k}{N}$$

$$\langle k \rangle = \sum_k k P(k) = 1 \cdot \frac{7}{16} + 2 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{3}{16} + 4 \cdot \frac{3}{16} + 6 \cdot \frac{2}{16} = 2.625$$

$$\langle k^2 \rangle = \sum_k k^2 P(k) = 1^2 \cdot \frac{7}{16} + 2^2 \cdot \frac{1}{16} + \cdots = 9.875$$

d) $Q(h) = \frac{h P(h)}{\langle k \rangle}$: $Q(1) = \frac{1}{\langle k \rangle} \cdot \frac{7}{16} = 0.1667$, $Q(2) = \frac{2}{\langle k \rangle} \cdot \frac{1}{16} = 0.0476$

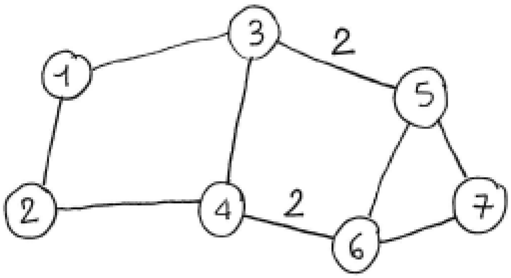
$Q(3) = \frac{3}{\langle k \rangle} \cdot \frac{3}{16} = 0.2143$, $Q(4) = \frac{4}{\langle k \rangle} \cdot \frac{3}{16} = 0.2857$,

$Q(6) = \frac{6}{\langle k \rangle} \cdot \frac{2}{16} = 0.2857$, $K_{nn} = \sum_h h Q(h) = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} = 3.7619$

<u>Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.</u>

Problema 2 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, pesata, rappresentata in figura (dove non specificato il peso vale 1).



a) Ignorando dapprima i pesi (ponendoli cioè tutti pari a 1), calcolare la modularità associata alla partizione $P = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6,7\}\}$.
b) Considerando ora i pesi indicati in figura, proporre una α-partition (cioè una partizione in cui tutte le comunità abbiano probabilità di persistenza non inferiore ad α), con $\alpha = 0.5$, composta da 3 comunità.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $[k_i k_j] = \begin{vmatrix} 4 & 4 & & & & & \\ 4 & 4 & & & & & \\ & & 9 & 9 & & & \\ & & 9 & 9 & & & \\ & & & & 9 & 9 & 6 \\ & & & & 9 & 9 & 6 \\ & & & & 6 & 6 & 4 \end{vmatrix}$

$[k_i] = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$2L = \sum_i k_i = 18$

$$Q = \frac{1}{2L} \sum_{C_1,C_2,C_3} \sum_{i,j \in C_h} \left[a_{ij} - \frac{k_i k_j}{2L} \right] = \frac{1}{18} \left[\left(2 - \frac{16}{18}\right) + \left(2 - \frac{36}{18}\right) + \left(6 - \frac{64}{18}\right) \right]$$

$$= 0.1975$$

b) prop. di persistenza della sottorete (pesata) C:

$$\alpha_C = \frac{\sum_{i \in C} s_i^{INT}}{\sum_{i \in C} s_i}$$

La partizione analizzata sopra non va bene poiché

$$\alpha_{\{3,4\}} = \frac{1+1}{4+4} = 0.25 < 0.5$$

Scelgo $P = \{\{1,2\},\{3,5\},\{4,6,7\}\}$, collocando i link pesanti <u>all'interno</u> delle comunità; verifica:

$$\alpha_{\{1,2\}} = \frac{1+1}{2+2} = 0.5 \checkmark$$

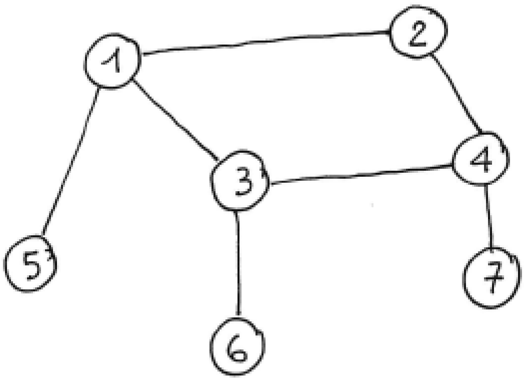
$$\alpha_{\{3,5\}} = \frac{2+2}{4+4} = 0.5 \checkmark$$

$$\alpha_{\{4,6,7\}} = \frac{2+3+1}{4+4+2} = 0.6 \checkmark$$

<u>Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.</u>

Problema 3 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Scrivere la matrice di adiacenza.
b) Scrivere la matrice laplaciana.
c) Scrivere la matrice di transizione di un random walker.
d) Riconoscere che si tratta di una rete bipartita, evidenziando la partizione dei nodi nei due insiemi opportuni, e scrivere quindi la matrice di incidenza della rete bipartita.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = 1$ se esiste link i,j; 0 altrimenti

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad [k_i] = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

b) $L = \mathrm{diag}(k_1, k_2, \dots, k_N) - A$

$$L = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

c) $P = [p_{ij}]$, $p_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{k_i}$

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

d) $S_1 = \{1, 4, 6\}$ $S_2 = \{2, 3, 5, 7\}$: esistono solo collegamenti tra S_1 e S_2

$$B = \begin{array}{c|c} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \left.\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{matrix}\right\} S_1 \\ \underbrace{\begin{matrix} 2 & 3 & 5 & 7 \end{matrix}}_{S_2} & \end{array}$$

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 4 (5 punti)

Rete small-world (Watts-Strogatz): procedura di costruzione e proprietà al variare del tasso di rewiring

---

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 5 (5 punti)

Modello (Motter-Lai) di cascata di guasti: algoritmo e risultati su rete omogenea e scale-free

<u>Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)</u>

Da una rete (non diretta, non pesata) vengono rimossi alcuni link. Rispetto a prima della rimozione

[1] il diametro diminuisce (o al più resta invariato)
(*) [2] il coefficiente di clustering globale diminuisce (o al più resta invariato)
[3] la distanza media aumenta (o al più resta invariata)

Nel 3-shell di una rete (non diretta, non pesata)

[1] tutti i nodi hanno grado maggiore o uguale a 3
[2] ci sono tutti e soli i nodi con grado maggiore o uguale a 3
[3] tutti i nodi hanno grado esattamente uguale a 3

Il modello Dorogovtsev-Mendes-Samukhin (DMS) è una generalizzazione del modello Barabasi-Albert per generare una rete scale-free con

[1] coefficiente di clustering elevato
[2] distribuzione di grado power-law con esponente arbitrario
[3] distribuzione di grado poissoniana con media arbitraria

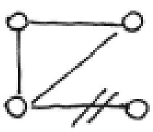
In una rete diretta, fortemente connessa, di n integratori ($\dot{x}_i = u_i$) tra loro interagenti, il valore dello stato comune di consenso $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \ldots = \bar{x}_n = \bar{x}$

[1] non dipende dallo stato iniziale degli integratori
(*)(*) [2] non dipende dalla topologia della rete
[3] dipende dalla topologia della rete

Quando due oscillatori periodici sono tra loro "sincronizzati in fase"

[1] la loro differenza di fase è nulla
[2] la loro differenza di fase è costante
[3] la loro differenza di fase è maggiorata da una costante

(*) Il coeff. di clustering può diminuire (diminuiscono i triangoli) ma anche aumentare: vedi questa rete, con e senza link sbarrato:



con il link: $C = \frac{7}{12}$, senza $C = \frac{3}{4}$

(*)(*) Rete DIRETTA! Per cui $\bar{x} = \sum_i w_i x_i(0)$, con $w = [w_i]$ autovettore sinistro della mat. Laplaciana L.