POLITECNICO
MILANO 1863

COMPLESSITA' NEI SISTEMI E NELLE RETI

Prof. C. Piccardi
Appello del 19/1/2023

COGNOME:________________________ NOME: _______________________

Codice Persona: _____________________ Corso di laurea (INF, MTM, ...): _____

Firma dello studente: ___________________________ Visto del docente:_____

5	5	5	5	5	5

Voto totale
30

AVVERTENZE

- Non è consentito consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone, ecc.).

- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Lo studente è tenuto a prendere visione delle **modalità d'esame dettagliate** alla pagina web del corso (http://piccardi.faculty.polimi.it/csr.html).

<u>Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.</u>

Problema 1 (5 punti)

Si consideri la rete descritta dalla seguente matrice di adiacenza:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

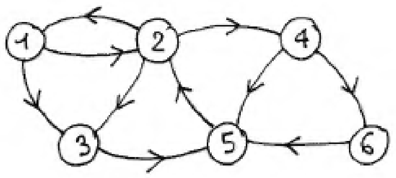
a) Determinare le componenti SCC, IN e OUT.
b) Determinare le distribuzioni di grado entrante e uscente, e i loro momenti primi.
c) Calcolare la densità della rete.
d) A partire dal nodo 1, determinare i primi due passi di un random walker. A questo scopo, abbiamo a disposizione un generatore di numeri casuali uniformemente distribuiti nell'intervallo [0,1], i cui primi numeri estratti sono i seguenti:

0.4854   0.8003   0.1419   0.4218   0.8147   0.9058   0.1270   0.9134   0.6324   …

(*nota bene: vi sono più modi possibili di utilizzare la sequenza data, specificare con precisione la procedura utilizzata*).

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a)



Da ogni nodo esiste un cammino verso ogni altro nodo, per cui la rete è connessa.

SCC = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

IN = {∅}   OUT = {∅}

b) $[k_i^{IN}] = [1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad 1]$

$[k_i^{OUT}] = [2 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1]$

$$p^{IN}(k) = \frac{\text{n. nodi} \mid k_i^{IN} = k}{N} = \begin{cases} \frac{3}{6}, & \text{per } k = 1 \\ \frac{2}{6}, & \text{per } k = 2 \\ \frac{1}{6}, & \text{per } k = 3 \\ 0, & \forall \text{altro } k \end{cases}$$

$$\langle k^{IN} \rangle = \frac{1}{N} \sum_i k_i^{IN} = \frac{10}{6}$$

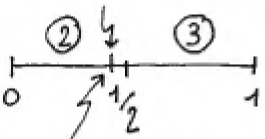
C.V.D.

$$p^{OUT}(k) = \frac{\text{n. nodi} \mid k_i^{OUT} = k}{N} = \begin{cases} \frac{3}{6}, & \text{per } k = 1 \\ \frac{2}{6}, & \text{per } k = 2 \\ \frac{1}{6}, & \text{per } k = 3 \\ 0, & \forall \text{altro } k \end{cases}$$

$$\langle k^{OUT} \rangle = \frac{1}{N} \sum_i k_i^{OUT} = \frac{10}{6}$$

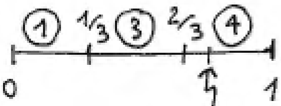
c) $\rho = \frac{L}{N(N-1)} = \frac{10}{6 \cdot 5} = \frac{1}{3}$

d) step 1, NODO 1:
possibili successori: nodi $\{2, 3\}$, per cui divido l'intervallo $[0,1]$ in due parti uguali:



1° numero estratto = 0.4854 $\Rightarrow$ step verso NODO 2

step 2, NODO 2, successori $\{1, 3, 4\}$

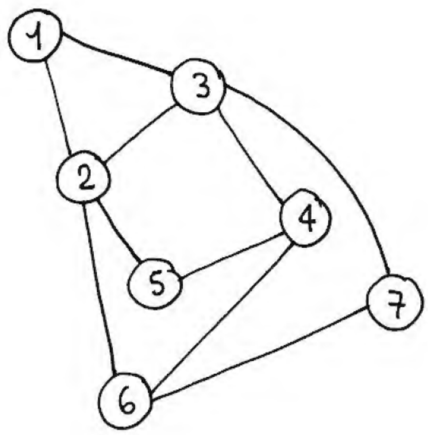


2° numero estratto = 0.8003 $\Rightarrow$ step verso NODO 4

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 2 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Determinare la matrice delle similarità tra nodi "common neighbour" e, in base a tale matrice, dire quale link non presente nella rete è più verosimile che esista.
b) Determinare la matrice delle similarità tra nodi "preferential attachment" e, in base a tale matrice, dire quale link non presente nella rete è più verosimile che esista.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) COMMON NEIGHBOUR : S_{ij} è il numero di vicini in comune tra i nodi i e j (oppure l'elemento i,j di A^2, se A è la matrice di adiacenza ; oppure il numero di 1 in comune tra le righe i e j di A) :

$$S = \begin{vmatrix} - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & - & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ & & - & 0 & 2 & 3 & 0 \\ & & & - & 0 & 0 & 2 \\ & & & & - & 2 & 0 \\ & & & & & - & 0 \\ & & & & & & - \end{vmatrix}$$

Sono evidenziate le coppie (i,j) tali che $a_{ij} = 0$ (link non presente).

I link più verosimili sono a pari merito (2,4) e (3,6).

b) PREFERENTIAL ATTACHMENT : $S_{ij} = k_i k_j$

$$[k_i] = [2 \; 4 \; 4 \; 3 \; 2 \; 3 \; 2]$$

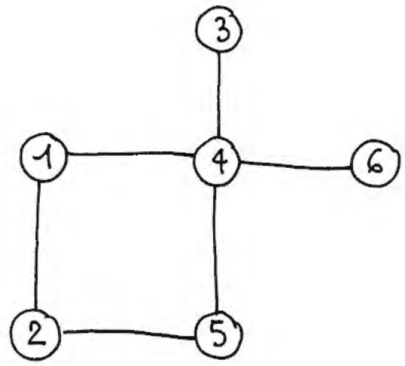
$$S = \begin{vmatrix} - & 8 & 8 & 6 & 4 & 6 & 4 \\ & - & 16 & 12 & 8 & 12 & 8 \\ & & - & 12 & 8 & 12 & 8 \\ & & & - & 6 & 9 & 6 \\ & & & & - & 6 & 4 \\ & & & & & - & 6 \\ & & & & & & - \end{vmatrix}$$

Anche qui i link più verosimili sono (2,4) e (3,6).

__Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.__

Problema 3 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



Per ogni nodo, calcolare:
a) degree centrality
b) betweenness centrality
c) closeness centrality
d) random walk centrality

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) Coincide con il grado : $[k_i] = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

b) $b_i = \sum_{j,k} \frac{n_{jk}(i)}{n_{jk}}$

$$[d_{ij}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ & & 0 & 1 & 2 & 2 \\ & & & 0 & 1 & 1 \\ & & & & 0 & 2 \\ & & & & & 0 \end{vmatrix} \quad [b_i] = \begin{vmatrix} 0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ 0+\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0+1+\frac{1}{2}+1+1+1+1+1+1 \\ 0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 7.5 \\ 3/2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

c) $\gamma_i = \frac{N-1}{\sum_j d_{ij}}$ $\quad [\gamma_i] = \left[\frac{5}{8} \quad \frac{5}{10} \quad \frac{5}{10} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{5}{10} \right]$

d) $\pi_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$ $\quad [\pi_i] = \left[\frac{2}{12} \quad \frac{2}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{4}{12} \quad \frac{2}{12} \quad \frac{1}{12} \right]$

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 4 (5 punti)

Modularità: definizione e interpretazione

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 5 (5 punti)

Consenso in una rete non diretta di integratori: ipotesi, equazioni descrittive, risultati (NON sono richieste dimostrazioni)

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata = – 0.5, risposta non data = 0)

Se una rete diretta è non connessa, si può affermare che

[1] per qualunque coppia i, j, non esiste il percorso $i \to j$

[2] per almeno una coppia i, j, non esiste il percorso $i \to j$

[3] per almeno una coppia i, j, esiste il percorso $i \to j$ ma non il percorso $j \to i$

Per $N \to \infty$, il coefficiente di clustering di una rete Barabasi-Albert

[1] tende a zero

[2] tende a 1

[3] tende a un valore limite $0 < C < 1$ che dipende dalla rete

$$C \to \frac{(\log N)^2}{N} \to 0$$

La "information centrality" del nodo i è basata sulla variazione

[1] della distanza media della rete a seguito della rimozione di i

[2] della più grande componente connessa della rete a seguito della rimozione di i

[3] della efficienza della rete a seguito della rimozione di i

$$I_i = \frac{\Delta E_i}{E_i}$$

In un processo SIS su rete omogenea, a parità di tutto il resto, la soglia epidemiologica

[1] aumenta al crescere del grado medio della rete

[2] diminuisce al crescere del grado medio della rete

[3] è indipendente dal grado medio della rete

$$\beta_c = \frac{\gamma}{\langle K \rangle}$$

In una rete di n oscillatori $\dot{x} = f(x) + Hu$, $x \in R^n$, tra loro interagenti attraverso un accoppiamento lineare (diffusivo), quando tutti i sistemi sono sincronizzati in modo completo

[1] gli ingressi u di tutti i sistemi sono identicamente nulli

[2] gli ingressi u sono identici per tutti i sistemi, ma non identicamente nulli

[3] gli ingressi u sono diversi da sistema a sistema

$u_i = \sum_j d(x_j - x_i)$,

se $\underbrace{x_j = x_i \ \forall i,j}_{\text{sincronizzazione}}$, allora $u_i = 0$