POLITECNICO
MILANO 1863

COMPLESSITA’ NEI SISTEMI E NELLE RETI

Prof. C. Piccardi
Appello del 30/6/2022

COGNOME:______________________ NOME: _____________________

Codice Persona: ___________________ Corso di laurea (INF, MTM, ...): _____

Firma dello studente: _________________________ Visto del docente:_____

							Voto totale
5	5	5	5	5	5		30

AVVERTENZE

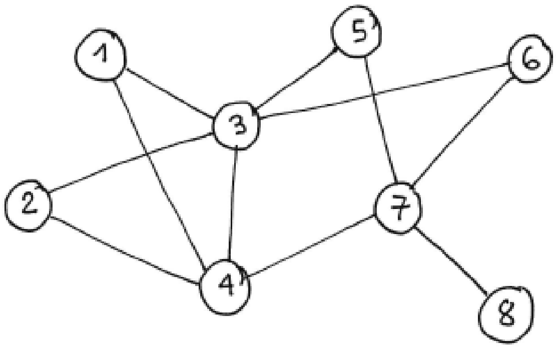
- Non è consentito consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone, ecc.).

- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Lo studente è tenuto a prendere visione delle **modalità d’esame dettagliate** alla pagina web del corso (http://piccardi.faculty.polimi.it/csr.html).

<u>Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.</u>

Problema 1 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



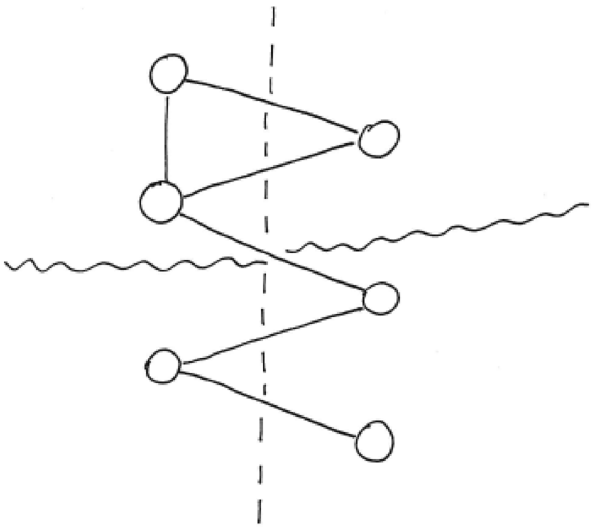
a) Scrivere la matrice di adiacenza e la matrice Laplaciana della rete.
b) Calcolare il momento primo e secondo della distribuzione di grado.
c) Utilizzando un criterio a scelta, nell'insieme dei link mancanti determinare i link con più alta verosimiglianza di esistere.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 2 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta rappresentata in figura.



a) Determinare la modularità della partizione definita dalla linea ondulata orizzontale in figura.
b) Determinare la modularità della partizione definita dalla linea tratteggiata verticale in figura.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 3 (5 punti)

Si proponga una rete non diretta formata da (almeno) 15 nodi, in cui esistano k-core non vuoti per ogni k=1,2,3,4,5.

a) Una volta disegnata la rete, si svolga la scomposizione k-core per dimostrare l'esistenza dei k-core richiesti.

Sulla rete ottenuta al punto a):

b) Determinare il diametro.
c) Determinare il nodo con random walk centrality più elevata e determinarne il valore.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 4 (5 punti)

Centralità random-walk e Pagerank.

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 5 (5 punti)

Processo SIS in reti omogenee.

Indicare la risposta esatta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione
(risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)

In una rete diretta, se i due nodi i e j fanno parte della stessa componente, allora

[1] esiste il link $i \rightarrow j$ e/o il link $j \rightarrow i$
[2] esiste il percorso $i \rightarrow j$ o il percorso $j \rightarrow i$
[3] esiste il percorso $i \rightarrow j$ e il percorso $j \rightarrow i$

Se il coefficiente di clustering (medio) di una rete è nullo, allora

[1] la rete è sicuramente completa
[2] la rete è sicuramente un albero
[3] nessuna delle due risposte precedenti è corretta

Il modello Holme-Kim (HK) genera una rete

[1] con distribuzione di grado omogenea e coefficiente di clustering elevato
[2] con distribuzione di grado power-law con esponente arbitrario
[3] con distribuzione di grado power-law e coefficiente di clustering elevato

Dato un nodo i di una rete non diretta, la rete viene modificata nella sua struttura "lontano" dal nodo i (la modifica non riguarda cioè né i né i suoi primi vicini). A causa di ciò:

[1] Il grado di i cambia sicuramente.
[2] La random walk centrality di i può cambiare.
[3] La betweenness centrality di i cambia sicuramente.

In una rete diretta, (fortemente) connessa, di integratori interagenti:

[1] non è detto venga raggiunto il consenso, dipende dalla topologia della rete
[2] il consenso è raggiunto, a un valore indipendente dallo stato iniziale
[3] il consenso è raggiunto, a un valore dipendente dallo stato iniziale

1 a) $A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad [k_i] = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{vmatrix}$

$$L = \mathrm{diag}(k_i) - A = \begin{vmatrix} +2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

b) $\langle k \rangle = \sum_k k P(k) = 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{4}{8} + 4 \cdot \frac{2}{8} + 5 \cdot \frac{1}{8} = 2.75$

$\langle k^2 \rangle = \sum_k k^2 P(k) = 1 \cdot \frac{1}{8} + 2^2 \cdot \frac{4}{8} + 4^2 \cdot \frac{2}{8} + 5^2 \cdot \frac{1}{8} = 9.25$

c) matrice di similarità "common neighbours":

$$S = \begin{vmatrix} - & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & - & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ & & & - & 2 & 2 & 0 & 1 \\ & & & & - & 2 & 0 & 1 \\ & & & & & - & 0 & 1 \\ & & & & & & - & 0 \\ & & & & & & & - \end{vmatrix}$$

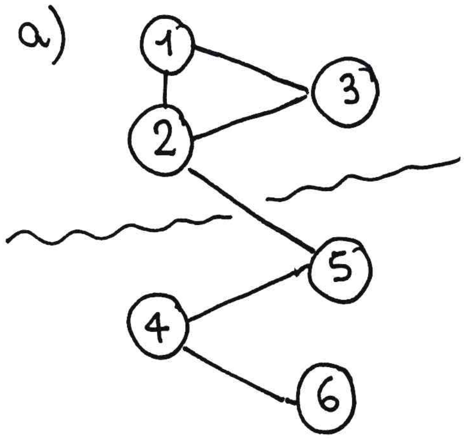
Tra i link (mancanti) quelli con $S_{ij} = 2$ o $S_{ij} = 3$ hanno più alta verosimiglianza di esistere; essi sono:

(3,7)

(1,2), (4,5), (4,6), (5,6)

mentre (3,4) è già esistente.

② a)



$$A = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right| \qquad [k_i] = \left|\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 2 \\ \hline 2 \\ 2 \\ 1 \end{array}\right|$$

$$2L = \sum_i k_i = 12$$

$$[k_i k_j] = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 6 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 6 & 9 & 6 & 6 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ \hline 4 & 6 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right|$$

$$Q = \frac{1}{2L} \sum_{C_h} \sum_{i,j \in C_h} \left[a_{ij} - \frac{k_i k_j}{2L} \right] =$$

$$= \frac{1}{12}\left(\left[6 - \frac{49}{12} \right] + \left[4 - \frac{25}{12} \right] \right) =$$

$$= 0.3194$$

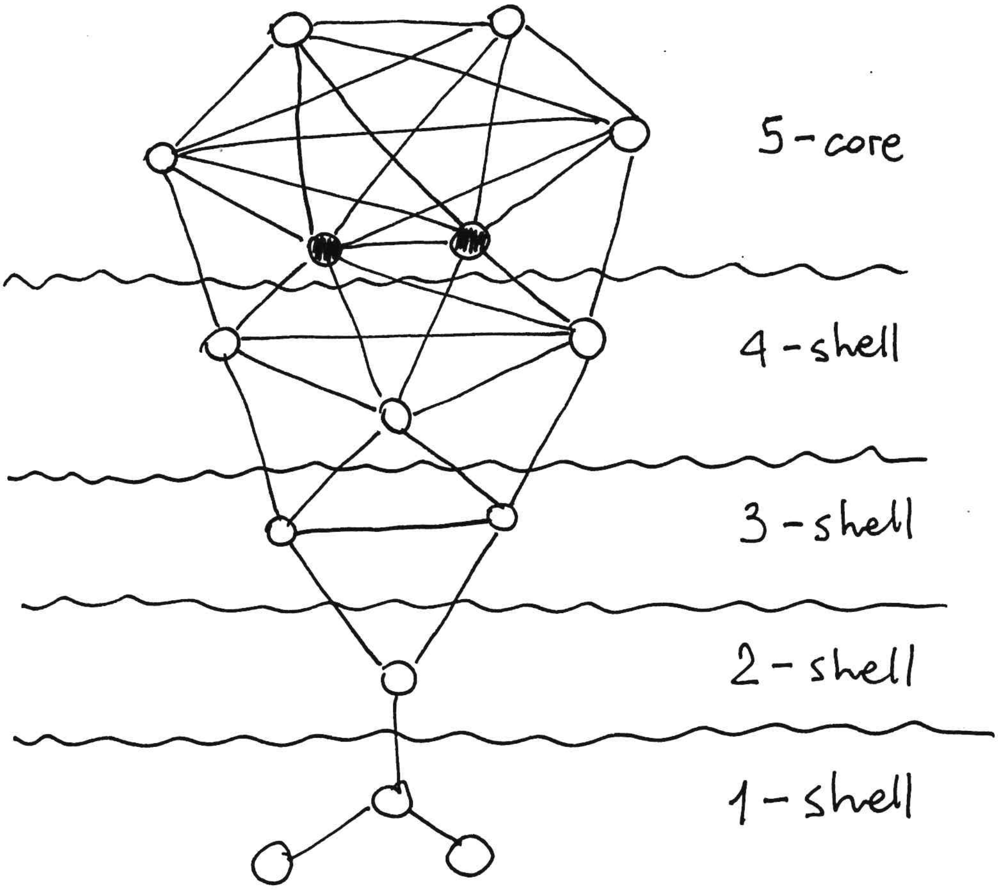
b) $C_1 = \{1, 2, 4\}$: sottomatrici BLU sopra

$C_2 = \{3, 5, 6\}$: " VERDI sopra

$$Q = \frac{1}{12}\left(\left[2 - \frac{49}{12} \right] + \left[0 - \frac{25}{12} \right] \right) = -0.3472$$

(< 0 perché prevalgono i link inter-comunitari)

(3) a) Una possibile rete, con la decomposizione richiesta:



b) $D = \max_{i,j} d_{ij}$

Per ispezione, noto che $D = 6$.

c) $\Pi_i = \dfrac{k_i}{\sum_j k_j}$

Il nodo con Π_i più elevata è quello con grado più elevato: si tratta dei due nodi neri, che hanno $k_i = 7$, per cui $\Pi_i = \dfrac{7}{68}$.