POLITECNICO
MILANO 1863

COMPLESSITA' NEI SISTEMI E NELLE RETI

Prof. C. Piccardi
Appello del 9/6/2022

COGNOME:________________________ NOME: _______________________

Codice Persona: _____________________ Corso di laurea (INF, MTM, ...): _____

Firma dello studente: ___________________________ Visto del docente:_____

5	5	5	5	5	5		Voto totale 30

AVVERTENZE

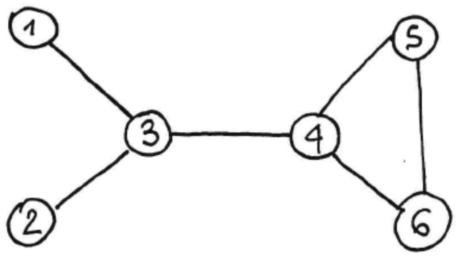
- Non è consentito consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone, ecc.).

- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Lo studente è tenuto a prendere visione delle **modalità d'esame dettagliate** alla pagina web del corso (http://piccardi.faculty.polimi.it/csr.html).

<u>Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.</u>

Problema 1 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



Per ciascun nodo, calcolare:

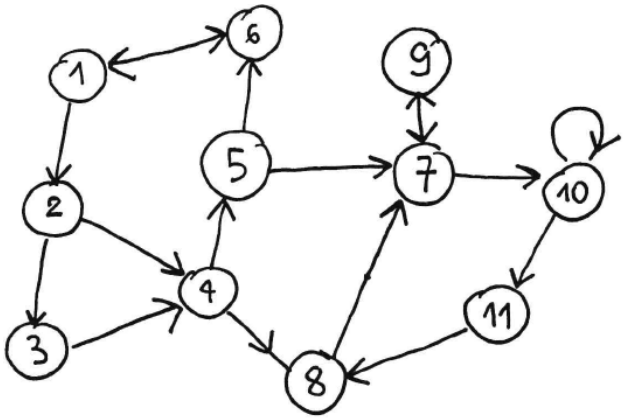
a) la degree centrality;
b) la betweenness centrality;
c) la closeness centrality;
d) la random walk centrality;
e) il coefficiente di clustering.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 2 (5 punti)

Si consideri la rete diretta rappresentata in figura.



a) Determinare la distribuzione del grado entrante e quella del grado uscente.
b) Determinare, se esistono, le componenti fortemente connesse.
c) Determinare la matrice delle probabilità di transizione di un random walker.
d) Determinare la random walk centrality del nodo 4.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

<u>Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.</u>

Problema 3 (5 punti)

Abbiamo a disposizione un generatore di numeri casuali uniformemente distribuiti nell'intervallo [0,1], i cui primi numeri estratti sono i seguenti (l'ordine di lettura è da sinistra a destra, quindi dall'alto al basso):

0.4854	0.8003	0.1419	0.4218	0.8147	0.9058	0.1270	0.9134	0.6324	0.0975
0.2785	0.5469	0.8575	0.9649	0.1576	0.9706	0.9572	0.9157	0.7922	0.9595
0.6557	0.0357	0.8491	0.9340	0.6787	…				

a) Utilizzando tale sequenza, creare una rete mediante Stochastic Block Model, composta da 2 blocchi di 3 nodi ciascuno, con probabilità di connessione intra-blocco pari a 0.9 e interblocco pari a 0.2, specificando la matrice di adiacenza e rappresentando la rete graficamente (*nota bene: vi sono più modi possibili di utilizzare la sequenza data per costruire la rete, specificare con precisione la procedura utilizzata*).
b) Calcolare la modularità relativa alla partizione in cui ogni blocco è una comunità.
c) Calcolare la probabilità di persistenza dei due blocchi.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 4 (5 punti)

Rete Barabasi-Albert: procedura di costruzione e proprietà principali.

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 5 (5 punti)

Definizione di k-core e procedura di decomposizione.

Indicare la risposta esatta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)

La distribuzione di grado di una rete Erdos-Renyi, per piccoli valori di N, è una:

[1] binomiale
[2] Poisson
[3] gaussiana
[4] ipergeometrica

Nella definizione del PageRank, il termine di teletrasporto ha lo scopo:

[1] di assegnare preferenze personali alla ricerca dei nodi importanti
[2] di rendere la rete non diretta
[3] di rendere la rete non pesata
[4] di rendere la rete connessa

In un processo SIS su una rete omogenea con N nodi, la soglia epidemica (valore di trasmissività sotto il quale l'epidemia non può sussistere):

[1] cresce al crescere della densità della rete
[2] decresce al crescere della densità della rete
[3] vale 0 qualunque sia la densità della rete
[4] è positiva e non dipende dalla densità della rete

In una rete connessa, non diretta, di integratori interagenti, il tempo di convergenza alla soluzione di consenso:

[1] cresce al crescere di λ_2(=primo autovalore non nullo della matrice laplaciana)
[2] decresce al crescere di λ_2
[3] dipende dal rapporto λ_2/λ_N
[4] è indipendente dalla topologia della rete

Nel modello di Kuramoto, due oscillatori con diversa frequenza naturale sono tra loro sincronizzati se:

[1] quando interagiscono, la loro fase coincide
[2] quando non interagiscono, la loro fase coincide
[3] quando interagiscono, la derivata della loro fase coincide
[4] quando non interagiscono, la derivata della loro fase coincide

① a) $[k_i] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

b) $[d_{ij}] = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ & & 0 & 1 & 2 & 2 \\ & & & 0 & 1 & 1 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{vmatrix}$

$[b_i] = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0+1+1+1+1+1+1+1 \\ 0+1+1+1+1+1+1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad b_i = \sum_{j,k} \frac{n_{jk}(i)}{n_{jk}}$

c) $\gamma_i = \dfrac{N-1}{\sum_j d_{ij}} \qquad [\gamma_i] = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & \frac{5}{11} & \frac{5}{7} & \frac{5}{7} & \frac{5}{10} & \frac{5}{10} \end{bmatrix}$

d) $\pi_i = \dfrac{k_i}{\sum_j k_j} \qquad [\pi_i] = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{3}{12} & \frac{3}{12} & \frac{2}{12} & \frac{2}{12} \end{bmatrix}$

(rete non diretta)

e) $c_i = \begin{cases} \dfrac{2e_i}{k_i(k_i-1)}, & \text{se } k_i > 1 \\ 0, & \text{se } k_i \leq 1 \end{cases}$

$\left[\dfrac{k_i(k_i-1)}{2}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$[e_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$[c_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2

a) $$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} = k^{OUT} = \sum_j a_{ij}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = k^{IN} = \sum_i a_{ij}$$

b) $SCC_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad SCC_2 = \{7, 8, 9, 10, 11\}$

a) [CONTINUA...] $P^{IN}(k) = \dfrac{\text{n. nodi con grado entr.} = k}{N} =$

$$\begin{cases} P^{IN}(1) = \dfrac{6}{11} \\ P^{IN}(2) = \dfrac{4}{11} \\ P^{IN}(3) = \dfrac{1}{11} \\ P^{IN}(k) = 0 \quad \forall k \geq 4 \end{cases}$$

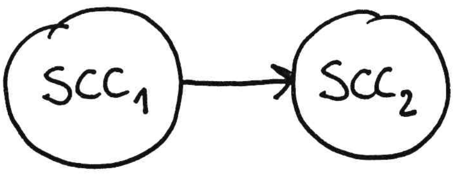
$$P^{OUT}(k) = \frac{\text{n. nodi con grado usc.} = k}{N}$$

$$\begin{cases} P^{OUT}(1) = \dfrac{5}{11} \\ P^{OUT}(2) = \dfrac{6}{11} \\ P^{OUT}(k) = 0 \quad \forall k \geq 3 \end{cases}$$

c) $P = [p_{ij}] = \left[\dfrac{a_{ij}}{k_i^{OUT}} \right] =$

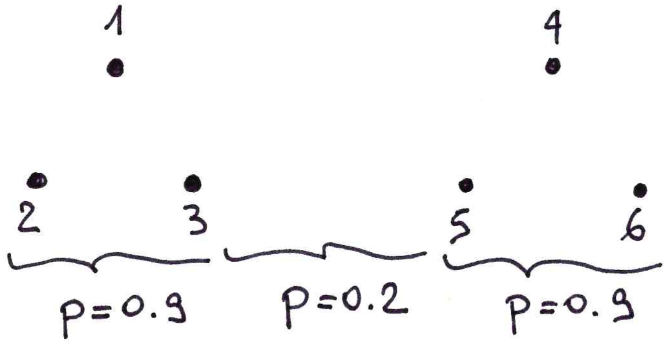
$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) La struttura a blocchi della rete è la seguente:



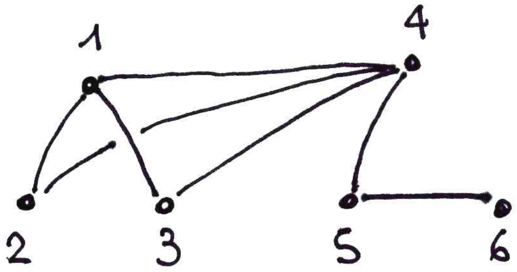
Pertanto, per $t \to \infty$, la probabilità di trovare il random walker in SCC_1 è nulla. Siccome $4 \in SCC_1$, avremo $\pi_4 = 0$.

③ a)



Listando ordinatamente le coppie di nodi (i,j), con $(i,j)=1,2,\dots,6$, $j>i$, il link esiste se e solo se $r<p$, con r preso ordinatamente dalla lista di numeri casuali.

(i,j)	r	p	link
1,2	0.48	$\boxed{0.9}$	1
1,3	0.80	$\boxed{0.9}$	1
1,4	0.14	0.2	1
1,5	0,42	0.2	0
1,6	0.81	0.2	0
2,3	0,91	$\boxed{0.9}$	0
2,4	0.12	0.2	1
2,5	0.91	0.2	0
2,6	0.63	0.2	0
3,4	0.09	0.2	1
3,5	0.27	0.2	0
3,6	0.54	0.2	0
4,5	0.85	$\boxed{0.9}$	1
4,6	0.96	$\boxed{0.9}$	0
5,6	0.15	$\boxed{0.9}$	1



$$A = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

$$[k_i] = |3 \ 2 \ 2 \ 4 \ 2 \ 1]$$

$$2L = \sum_i k_i = 14$$

b) $$Q = \frac{1}{2L} \sum_{C_1,C_2} \sum_{i,j \in C_h} \left(a_{ij} - \frac{k_i k_j}{2L} \right)$$

$$[k_i k_j] = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 6 & 6 & 12 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 4 & 8 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 4 & 8 & 4 & 2 \\ \hline 12 & 8 & 8 & 16 & 8 & 4 \\ 6 & 4 & 4 & 8 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right|$$

$$Q = \frac{1}{14}\left\{\left[4 - \frac{49}{14}\right] + \left[4 - \frac{49}{14}\right]\right\} = 0.0714$$

c) $$\alpha_c = \frac{\sum_{i \in c} k_i^{INT}}{\sum_{i \in c} K_i}$$

$$\alpha_1 = \frac{2+1+1}{3+2+2} = \frac{4}{7} \simeq 0.57 \qquad \alpha_2 = \frac{1+2+1}{4+2+1} = \frac{4}{7} \simeq 0.57$$