POLITECNICO
MILANO 1863

COMPLESSITA' NEI SISTEMI E NELLE RETI

Prof. C. Piccardi
Appello del 13/1/2022

COGNOME:________________________ NOME: ______________________

Codice Persona: ____________________ Corso di laurea (INF, MTM, ...): _____

Firma dello studente: ___________________________ Visto del docente:_____

5	5	5	6	6	3

Voto totale
30

AVVERTENZE

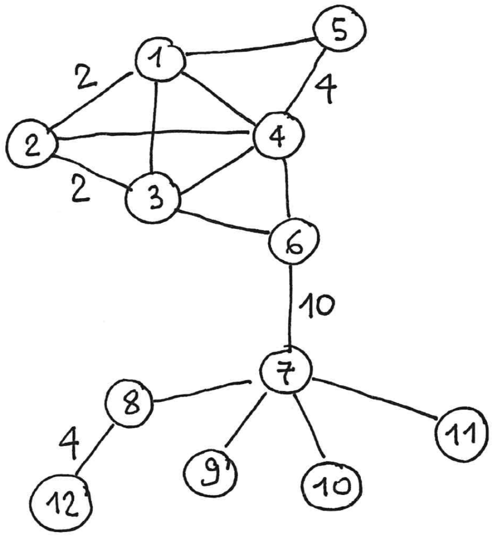
- Non è consentito consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone, ecc.).

- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Lo studente è tenuto a prendere visione delle **modalità d'esame dettagliate** alla pagina web del corso (http://piccardi.faculty.polimi.it/csr.html).

<u>Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.</u>

Problema 1 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, pesata, rappresentata in figura, dove i pesi valgono 1 per tutti i link in cui non è diversamente specificato.



a) Determinare la probabilità di persistenza delle due sottoreti {1,2,3,4,5} e {6,7,8,9,10,11,12}.

Trascurando ora i pesi (cioè ponendoli tutti uguali a 1):

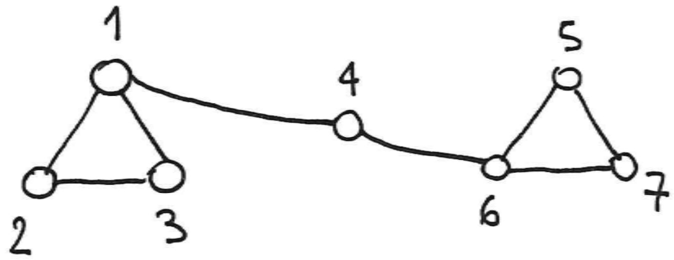
b) Calcolare il momento primo della distribuzione di grado.
c) Determinare la decomposizione k-shell della rete.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 2 (5 punti)

Si consideri la rete non diretta, non pesata, rappresentata in figura.



a) Calcolare distanza media e diametro della rete.
b) Calcolare la betweenness centrality di ciascun nodo.
c) Calcolare la closeness centrality di ciascun nodo.
d) Calcolare la random walk centrality di ciascun nodo.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

Rispondere con precisione e rigore formale, riportando le eventuali formule utilizzate e svolgendo i calcoli richiesti.

Problema 3 (5 punti)

Abbiamo a disposizione un generatore di numeri casuali uniformemente distribuiti nell'intervallo [0,1], i cui primi numeri estratti sono i seguenti (l'ordine è da sinistra a destra, poi dall'alto al basso):

0.4854	0.8003	0.1419	0.4218	0.8147	0.9058	0.1270	0.9134	0.6324	0.0975
0.2785	0.5469	0.9575	0.9649	0.1576	0.9706	0.9572	0.9157	0.7922	0.9595
0.6557	0.0357	0.8491	0.9340	0.6787	…				

a) Utilizzando tale sequenza, creare una rete Erdos-Renyi con 5 nodi e grado medio atteso pari a 1.6, specificando la matrice di adiacenza e rappresentando la rete graficamente (*nota bene: vi sono più modi possibili di utilizzare la sequenza data per costruire la rete, specificare con precisione la procedura utilizzata*).
b) Calcolare l'effettivo grado medio della rete ottenuta e la sua densità.
c) Calcolare il coefficiente di clustering dei singoli nodi e dell'intera rete.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

<u>Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..</u>

Domanda 4 (6 punti)

Average nearest neighbour degree, assortatività e disassortatività.

Rispondere con precisione e rigore formale, specificando il significato di tutte le variabili introdotte ed elencando le eventuali ipotesi necessarie. Non sono richiesti commenti, motivazioni, dimostrazioni, ecc..

Domanda 5 (6 punti)

Modello di Kuramoto: definizione, condizione di sincronizzazione tra due rotori, parametro d’ordine.

Indicare la risposta esatta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione
(risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)

In una rete Barabasi-Albert, per $N \to \infty$, la distribuzione di grado è tale che

[1] il momento primo diverge e il momento secondo è finito
[2] il momento secondo diverge e il momento primo è finito
[3] il momento primo e il momento secondo divergono
[4] il momento primo e il momento secondo sono finiti

Il consenso in una rete non diretta di integratori

[1] avviene in qualunque rete
[2] avviene in qualunque rete purché connessa
[3] avviene in qualunque rete purché completa
[4] avviene in qualunque rete purché bipartita

Nel corso del laboratorio Matlab si è simulato il seguente processo dinamico su rete:

[1] consenso in un insieme di integratori
[2] diffusione di un'epidemia
[3] sincronizzazione di fase di un insieme di rotori
[4] sincronizzazione completa di un insieme di sistemi dinamici

1) a)

$$\alpha_c = \frac{\sum_{i\in C_c} s_i^{int}}{\sum_{i\in C_c} s_i}$$

$$C_1 = \{1,2,\dots,5\}: \quad \alpha_1 = \frac{5+5+4+7+5}{5+5+5+8+5} = \frac{26}{28} \simeq 0.93$$

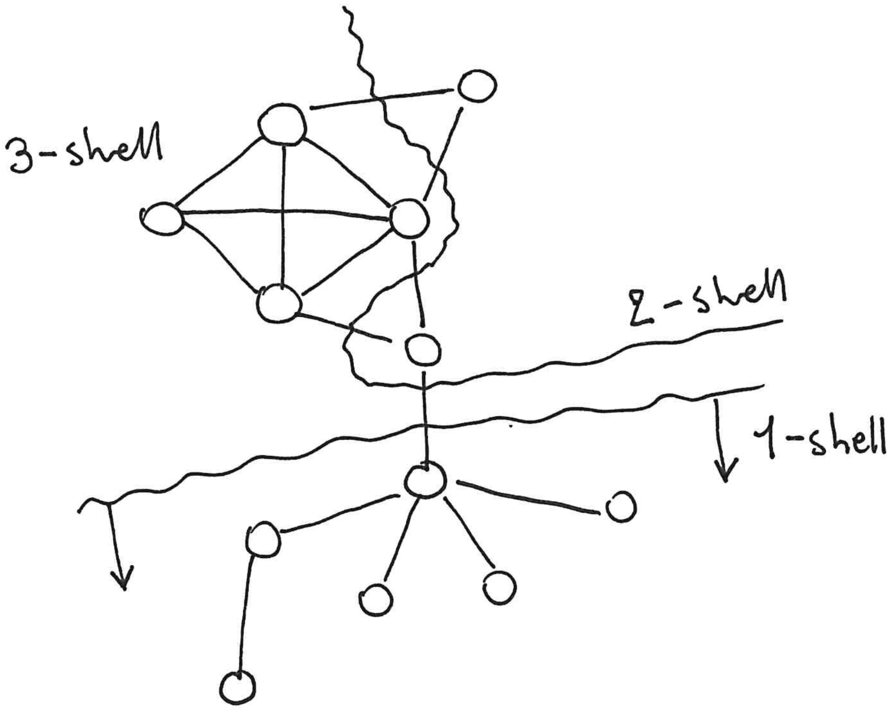
$$C_2 = \{6,7,\dots,12\}: \quad \alpha_2 = \frac{10+14+5+1+1+1+4}{12+14+5+1+1+1+4} = \frac{36}{38} \simeq 0.95$$

b) $$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k P(k) = \frac{2L}{N} = \frac{2\cdot 16}{12} \simeq 2.67$$

c) 1-shell : $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

2-shell : $\{5, 6\}$

3-shell : $\{1, 2, 3, 4\}$



②

a) $[d_{ij}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ & & 0 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ & & & 0 & 2 & 1 & 2 \\ & & & & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{vmatrix}$ $\langle d \rangle = \dfrac{1}{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{j>i} d_{ij} = \dfrac{46}{21} = 2.19$

$D = \max d_{ij} = 4$

b) $[b_i] = \begin{vmatrix} 0+1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 0 \\ 0 \\ 0+1+1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 0 \\ 0+1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{vmatrix}$ $b_i = \sum_{j,k} \dfrac{n_{jk}(i)}{n_{jk}}$

c) $\gamma_i = \dfrac{N-1}{\sum_j d_{ij}}$ $[\gamma_i] = \left[\frac{6}{11} \; \frac{6}{15} \; \frac{6}{15} \; \frac{6}{10} \; \frac{6}{15} \; \frac{6}{11} \; \frac{6}{15} \right]$

d) $\pi_i = \dfrac{k_i}{\sum_j k_j}$ $[k_i] = [3 \; 2 \; 2 \; 2 \; 2 \; 3 \; 2], \; \sum_j k_j = 16$

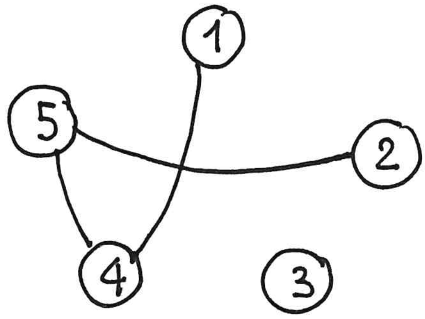
$[\pi_i] = \left[\frac{3}{16} \; \frac{1}{8} \; \frac{1}{8} \; \frac{1}{8} \; \frac{1}{8} \; \frac{3}{16} \; \frac{1}{8} \right]$

3

a) Poiché il grado medio atteso vale $\langle k \rangle = p(N-1)$, si deve porre $p = 1.6/4 = 0.4$.
Listando ordinatamente le coppie di nodi (i,j), con $i,j = 1,2,\dots,5$, $j > 1$, il link viene collocato se e solo se $r < p = 0.4$, dove r è preso dalla lista dei numeri casuali.

(i,j)	r	link
1,2	0.48	0
1,3	0.80	0
1,4	0.14	1
1,5	0.42	0
2,3	0.81	0
2,4	0.90	0
2,5	0.12	1
3,4	0.91	0
3,5	0.63	0
4,5	0.09	1

$$\Longrightarrow \quad A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$



b) $[k_i] = \left[\sum_i a_{ij}\right] = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad 2]$

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_i k_i = \frac{6}{5} = 1.2$$

$$\rho = \frac{L}{\frac{N(N-1)}{2}} = \frac{3}{10} = 0.3$$

c) Non esistono percorsi chiusi di lunghezza 3 ("triangoli"), per cui $C_i = 0 \;\forall i$ e $C = 0$.